

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. KLOTTER
J. LARGUERRE · H. NEUBER · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT
H. ULLMIEN · H. UNGER UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

Bd. 40

SEITE 289—384

HEFT 7/8

JULI/AUGUST 1960

AUS DEM INHALT:

H A U P T A U F S Ä T Z E

H. Ahbe: Theoretische Analyse des Tonspektrums der mit einem nachgiebigen Hammer angeschlagenen Saite / **M. Kurata** and **H. Okamura:** Bending of a Rectangular Plate with Two Opposite Free Edges and Other Two Simply Supported Edges Having Any Clamped Portion / **J. Münch:** Überschallströmungen um pendelnde Drehkörper / **E. Kreyszig:** Zur Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Methoden / **W. Bollermann:** Zur Einschließung von Eigenwerten unter Verwendung des Maximum-Minimum-Prinzips / **K. Morita** und **Y. Simokawa:** Nomographic Representation of the Functional Relations among Three Complex Variables / **J. E. Plainevaux:** Mouvement d'un rotor asymétrique tournant dans les paliers élastiques d'une équilibrée

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

EINGEGANGENE BÜCHER

NACHRICHTEN

AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN

INHALT:

Seite

Hauptaufsätze.

- H. Ahbe:** Theoretische Analyse des Tonspektrums der mit einem nachgiebigen Hammer angeschlagenen Saite 289
- M. Kurata and H. Okamura:** Bending of a Rectangular Plate with Two Opposite Free Edges and Other Two Simply Supported Edges Having Any Clamped Portion . 310
- J. Münch:** Überschallströmungen um pendelnde Drehkörper 328
- E. Kreyszig:** Zur Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Methoden 334
- W. Bollermann:** Zur Einschließung von Eigenwerten unter Verwendung des Maximum-Minimum-Prinzips 342
- K. Morita und Y. Simokawa:** Nomographic Representation of the Functional Relations among Three Complex Variables 350
- J. E. Plainevaux:** Mouvement d'un rotor asymétrique tournant dans les paliers élastiques d'une équilibreuse . 39

Kleine Mitteilungen.

- R. Gärtner:** Wirkungszusammenhänge mechanischer Glieder 368
- I. Bandić:** Sur l'équation différentielle d'un problème de technique étudié par M. R. Gran Olsson 370
- T. Li:** Über die partiellen Ableitungen der von Karman-Tsienschen Potentiale 370
- G. Bertram:** Beziehungen zwischen Defektabschätzungen und 'Linear programming' bei linearen Gleichungssystemen 373
- B. D. Aggarwala:** Elliptic Punch on a Half Space 374
- Buchbesprechungen** 375
- Eingegangene Bücher** 384
- Nachrichten** 384

Wir bitten, alle Manuskriptsendungen direkt an den Herausgeber, Prof. Dr.-Ing. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31, zu richten. Zu den Arbeiten, die als Hauptaufsätze bestimmt sind, erbitten wir auf gesondertem Blatt eine kurze Zusammenfassung des Inhalts, nach Möglichkeit in deutscher, englischer und russischer Sprache; falls die Übersetzungen nicht geliefert werden können, ist wenigstens die Angabe spezieller Fachausdrücke in den verschiedenen Sprachen erwünscht. Die Arbeiten sollen in klarer Schrift, möglichst mit Schreibmaschine, weitzeilig und einseitig geschrieben sein und die nötigen Hinweise für den Setzer betreffend Schrifttypen (z. B. griechisch, Fraktur), Sperrungen o. a. enthalten. Zur Beschleunigung des Drucks und zur Vermeidung von Setzfehlern empfiehlt es sich, umfangreiche und unübersichtliche Formelausdrücke durch Einführung von Abkürzungen zu vermeiden. Bilder sollen als Tuschzeichnungen auf Transparentpapier (Beschriftung mit Bleistift) oder als saubere Bleistiftskizzen ausgeführt sein; Bildunterschriften sind am Schluß des Textes anzufügen. Sollte die Arbeit bereits an anderer Stelle verbreitet sein (als Dissertation, Forschungsbericht, Manuskriptdruck o. ä.), so ist dies auf der ersten Textseite in einer Fußnote anzugeben. Für die Zusammenstellung der zitierten Literatur, am Schluß der Arbeit, bitten wir, sich einer einheitlichen Notation entsprechend folgendem Muster zu bedienen, z. B. W. Schmeidler, Über die Wärmespannungen in einem Körper, ZAMM 28 (1948), S. 54—59 oder G. Bürgermeister und H. Steup, Stabilitätstheorie I, 1. Aufl., Berlin 1957, Akademie-Verlag, S. 142—147. Die Autoren erhalten von den Hauptaufätzen 75, von den Kleinen Mitteilungen 25 Sonderdrucke ohne Berechnung, darüber hinaus bis zu 250 Sonderdrucke gegen Berechnung.

Der Verlag behält sich für alle Beiträge das Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung vor.

Band 1—7 erschien innerhalb der Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik

Ab Band 8 lautet der Reihentitel

SCHRIFTENREIHE DER INSTITUTE FÜR MATHEMATIK

BEI DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

und wird herausgegeben von
Prof. Dr. Heinrich Grell, Prof. Dr. Josef Naas, Prof. Dr. Achilles Papapetron, Prof. Dr. Hans Reichardt, Prof. Dr. Willi Rinow, Prof. Dr. Erhard Schmidt und Prof. Dr. Kurt Schröder

Der Begriff des Raumes in der Geometrie

Bericht von der Riemann-Tagung des Forschungsinstitutes für Mathematik. Mit Beiträgen von 28 Autoren, herausgegeben von Prof. Dr. J. NAAS und Prof. Dr. KURT SCHRÖDER
1957. VIII, 317 Seiten — 22 Abbildungen — 9 Tafeln — gr. 8° — vergriffen

Lösung des allgemeinen Randwertproblems für eindimensionale gedämpfte Wellen bei harmonischem Zeitgesetz
Von Dr. KARL BORKMANN und SIEGFRIED OBERLÄNDER
1955. 99 Seiten — gr. 8° — DM 12,—

Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen

Von A. W. POGORELOW
(Übersetzung aus dem Russischen)
Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. J. NAAS
1956. 79 Seiten — gr. 8° — DM 5,50

Bemerkungen über die Stabilitätsuntersuchungen der Wirbelstraßen

Von Prof. Dr. BL. DOLAPTSCHIEW
1957. 28 Seiten — gr. 8° — DM 3,30

Die Verbiegung konvexer Flächen

Von A. W. POGORELOW
(Übersetzung aus dem Russischen)
Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. E. REMBS
1957. 135 Seiten — 26 Abbildungen — gr. 8° — DM 18,50

Einführung in die Geometrie stationärer Zufallsfunktionen

Von A. M. JAGLOM
(Übersetzung aus dem Russischen)
Deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von Dr. HERBERT GOERING
1959. VIII, 177 Seiten — 8 Abbildungen — gr. 8° — DM 24,—

Tabellen von Exponentialfunktionen und -integralen zur Anwendung auf Gebieten der Thermodynamik, Halbleiterttheorie und Gaskinetik

Von SIEGFRIED OBERLÄNDER
1959. VIII, 8 Seiten Text — 142 Tabellenseiten — 1 Abbildung — gr. 8° — Ganzleinen DM 35,—

In Vorbereitung befinden sich weiterhin:

Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik

Von Dr. HERBERT BENZ

Qualitative Theorie der nichtlinearen Schwingungen

Von Dr. ROLF REISSIG

Nomogramme zur Ermittlung der Wurfbahnen von Körpern im widerstehenden Medium

Von ELEONORE SCHWARZ

Fordern Sie bitte unseren Fachkatalog MATHEMATIK an, der Ihnen kostenlos zugestellt wird.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbitten

AKADEMIE - VERLAG - BERLIN

Auf Wunsch des Leiters des Fachausschusses für Rechenmaschinen der GAMM, Herrn Prof. Dr. A. WALTHER, Darmstadt, wird hiermit auf das vom 20. — 24. September 1960 in Rom stattfindende vom CENTRE INTERNATIONAL PROVISOIRE DE CALCUL (CIPC) veranstaltete Symposium über die „Numerische Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen und von Integral- und Integraldifferentialgleichungen“ hingewiesen.

H.

Theoretische Analyse des Tonspektrums der mit einem nachgiebigen Hammer angeschlagenen Saite^{*)}

Von H. AHBE

Nach einer bekannten Integraldarstellung werden die Amplituden der durch den Anschlag erzwungenen Saiten-Partialschwingungen berechnet. Unter dem Integral tritt die vom Hammer auf die Saite ausgeübte Druckkraft auf. Sie ist, wenn man von Plausibilitätsannahmen absieht, nicht unmittelbar gegeben, sondern findet sich als Lösung einer Volterraschen Integralgleichung zweiter Art vom Faltungstypus. Für diese Lösung wird ein Näherungsverfahren und im linearen Falle auch eine strenge Darstellung angegeben.

A well-known integral representation is used to compute the amplitudes of the partial vibrations of a percussed chord. The integral contains the force exerted by the hammer on the chord. Discounting more or less plausible assumptions, this force is not directly known but has to be found as a solution of a Volterra integral equation of the second kind. For the linear case an exact solution, and for the general case a method of approximation is given.

При помощи известного интегрального представления вычисляются амплитуды вызванных ударом вынужденных частичных колебаний струны. В подинтегральное выражение входит сила давления, действующая при ударе молотка на струну. Эта сила, если отвлечься от правдоподобных предположений, непосредственно не дана, а получается как решение некоторого интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Для отыскания этого решения дается приближенный метод, а в случае линейного уравнения точное представление.

1. Einleitung

Eine Zusammenstellung der benutzten Literatur befindet sich am Ende der Arbeit. Hinweise auf die dort angeführten Schriften sind in eckiger Klammer gegeben.

Die vorliegende Arbeit knüpft an die Abhandlung [12] an. Dort wurde das Geschehen während des Anschlagvorganges untersucht, hier fragen wir: Wie verhält sich eine eingespannte Saite nach dem Anschlag mit einem nachgiebigen Hammer?

Die Hauptgleichung des Anschlagvorganges, eine nicht notwendig lineare VOLTERRASche Integralgleichung zweiter Art, wird kurz hergeleitet (Abschn. 2). Die Lösung der Hauptgleichung wird

a) durch ein rekursives Näherungsverfahren im nicht notwendig linearen Fall (Abschn. 3),

b) in geschlossener Form im linearen Fall (Abschn. 5)

gegeben. Die geschlossene Form der Lösung eignet sich wenig zur numerischen Rechnung, trägt aber zur Klärung des Konvergenzverhaltens des Rekursionsverfahrens (Abschn. 6) bei, Die Berechnung der Partialschwingungs-Amplituden der Saite nach dem Anschlag (Abschn. 7) beschließt den theoretischen Teil der Arbeit. Die Darstellung, die ohne spezielle Hypothesen über den zeitlichen Verlauf der Anschlags-Einzelkraft auskommt, schließt eine in der Einleitung zu Abhandlung [12] erwähnte Lücke in der akustischen Literatur. Die numerische Rechnung (Abschn. 8) konnte dank der Benutzung einer elektronischen Rechenanlage vollständig durchgeführt werden¹⁾.

Da nach [12] die Rotationsträgheit der Saitenelemente bei Klaviersaiten der üblichen Abmessungen keinen Einfluß auf den Anschlagvorgang hat, beschränken wir uns hier auf die Untersuchung ideal schlanker Saiten, indem wir die Rotationsträgheit gleich Null setzen.

^{*)} Auszug aus der Dissertation des Verfassers, Darmstadt 1958, Referent: Prof. Dr.-Ing. K. MARGUERRE, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. J. DÖRR, Univ. Saarbrücken.

¹⁾ Ich habe Herrn Prof. Dr. A. WALTHER dafür zu danken, daß ich in seinem Institut die Rechenanlage IBM 650 der Deutschen Forschungsgemeinschaft benutzen durfte.

Wie die Nachgiebigkeit der Saitenbefestigung den Anschlagvorgang beeinflusst, ist theoretisch ungeklärt. Beschränkt man sich hingegen auf den Sonderfall²⁾, daß die der Anschlagstelle nähere Saitenbefestigung starr, die andere wenig nachgiebig ist, so kann man diese Nachgiebigkeit in erster Näherung in die Rechnung einbeziehen, indem man die Saite durch eine um ein passendes Stück verlängerte Saite ersetzt denkt³⁾. Es zeigt sich dabei, daß die Nachgiebigkeit der Saitenbefestigung in dem vom Klavierbauer verwirklichten Fall den Anschlagvorgang nur unwesentlich beeinflusst. Daher wird die Saitenbefestigung — vom Anhang abgesehen — als unnachgiebig vorausgesetzt.

Der Hammer wird durch einen druckelastischen Massenpunkt, die Saite durch ein gleichmäßig mit Masse⁴⁾ belegtes zugelastisches Linienstück mit festen Enden idealisiert. Der Hammer trifft senkrecht auf die Saite, deren Auslenkungen klein, eben und ungedämpft sind.

Der numerischen Untersuchung legen wir sechs physikalische Parameter zugrunde: Die Art und Weise des Anschlages wird durch die Geschwindigkeit v_0 , mit der der Hammer auf die Saite trifft, und durch die relative Anschlagstelle s festgelegt. Zur Kennzeichnung des Hammers dienen die Hammermasse m und die Hammer-Nachgiebigkeit h , zur Kennzeichnung der Saite die Saitenmasse m' und die Schwingungszahl ν_1 des Saitengrundtones. In Abhängigkeit von diesem Parametersystem werden gesucht: Der zeitliche Verlauf der Druckkraft $P(t)$, die der Hammer während des Anschlages auf die Saite ausübt, sowie die Amplituden a_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$) der Saitenpartialschwingungen, die als Folge des Anschlages auftreten. Für diese ergibt sich⁵⁾

$$a_\lambda = \frac{2}{\pi \sqrt{\varrho S}} \cdot \frac{|\sin(\lambda \pi s)|}{\lambda} \cdot \sqrt{\int_{\sin}^2 + \int_{\cos}^2} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

mit

$$\int_{\sin, \cos} = \int_0^{t_B} P(t) \cdot \frac{\sin}{\cos} [k_\lambda (t_B - t)] dt \quad (2),$$

wobei

$$k_\lambda = \frac{\lambda \pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\varrho}} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots) \quad (2a)$$

die Kreisfrequenz der λ -ten Saitenpartialschwingung ist. Es bedeuten ϱ die Saitendichte (Saitenmasse je Längeneinheit) und S die Saitenspannung. Die relative Anschlagstelle s bezeichnet das Verhältnis des Saitenabschnittes zwischen Anschlagstelle und näherem Saitenende zur ganzen Saitenlänge, die wir l nennen. Demgemäß ist $s = 0$ die untere und $s = 1/2$ die obere Grenze der Menge der definierten s -Werte. Der Anschlag beginnt zur Zeit $t = 0$ und endet zur Zeit $t = t_B$ (t_B = Berührungsdauer).

Die Berechnung der Amplituden a_λ nach (1) und (2) setzt also die Kenntnis des zeitlichen Verlaufes der Druckkraft $P(t)$ voraus. Ihn zu bestimmen dienen die Abschnitte 2 bis 6⁶⁾.

2. Hauptgleichung des Anschlagvorganges

Bezeichnet ξ das Verhältnis eines beliebigen Saitenabschnittes, dessen einer Endpunkt mit dem der Anschlagstelle näheren Saitenende zusammenfällt, zur ganzen Saitenlänge, so ist die Saitenauslenkung η „an der Stelle ξ “ ($0 \leq \xi \leq 1$) zur Zeit t ($t \geq 0$)

$$\eta(\xi, t) = \frac{2}{\pi \sqrt{\varrho S}} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda \pi s) \sin(\lambda \pi \xi) \cdot \int_0^t P(t_1) \sin[k_\lambda(t - t_1)] dt_1 \quad \left(k_\lambda = \frac{\lambda \pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\varrho}} \right) \quad (3)$$

²⁾ Er ist nach experimentellen Untersuchungen von H. ANSCHÜTZ, [11], im normalen Klavier etwa verwirklicht.

³⁾ Diese Bemerkung verdanke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. J. DÖRR. Sie wird im Anhang erläutert.

⁴⁾ Bei der mit Masse bezeichneten Eigenschaft der Saitenteilchen wird nur die Trägheit, nicht die Schwere beachtet.

⁵⁾ Zur Herleitung dieser wohl schon HELMHOLTZ bekannten Ergebnisse gehe man von der inhomogenen Saitenschwingungsgleichung aus. Als „Störungsfunktion“ wähle man die FOURIER-Entwicklung einer Einzelast. Setzt man die Saitenauslenkung durch eine gleichmäßig konvergente FOURIER-Reihe mit zeitabhängigen Koeffizienten an, so folgen (1) und (2) ohne weiteres aus der Analysis.

⁶⁾ Die durch (1) und (2) gegebene Aufgabe der Amplitudenberechnung ist in der theoretischen Akustik nicht neu. Zu Zeiten von HELMHOLTZ begnügte man sich wohl mit Lösungen, die sich auf einen Näherungsansatz etwa der Form $P(t) = P_{\max} \cdot \sin(\pi t/t_B)$ gründen, in dem die maximale Druckkraft P_{\max} und die Berührungsdauer t_B unbestimmt bleiben. Wie wir später (Bild 1) sehen, stellt ein solcher Ansatz für den genügend nahe an einem Saitenende erfolgenden Anschlag eine gute Näherung dar.

und speziell an der Anschlagstelle $\xi = s$ ($0 \leq s \leq 1/2$)

$$\eta(s, t) = \frac{2}{\pi \sqrt{\varrho S}} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin^2(\lambda \pi s) \cdot \int_0^t P(t_1) \sin[k_\lambda(t - t_1)] dt_1 \quad \left(k_\lambda = \frac{\lambda \pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\varrho}}\right) \quad (4)^7).$$

Da $\eta(s, t)$ nicht unmittelbar gegeben ist, reicht (4) zur Berechnung der Druckkraft $P(t)$ nicht aus. Eine von (4) unabhängige „Bindungsgleichung“ zwischen $\eta(s, t)$ und P erhält man, wenn zwischen P und z , der Eindringungstiefe der Saite in den nachgiebigen Hammer, eine Beziehung etwa auf Grund statischer Messungen vorliegt. Denn zwischen z und η besteht die Gleichung

$$z(t) = u(t) - \eta(s, t) \quad (5),$$

in der $u(t)$ den vom Berührungsbeginn an durchlaufenen Weg des Hammers, kurz Hammerweg genannt, darstellt. Ist m die Hammermasse und v_0 die Geschwindigkeit, mit der der Hammer die Saite zur Zeit $t = 0$ trifft, so betragen zur Zeit t die Hammergeschwindigkeit

$$\dot{u}(t) = v_0 - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1) dt_1 \quad (6)$$

und der Hammerweg

$$u(t) = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1) (t - t_1) dt_1 \quad (7).$$

Setzen wir (7) und (4) in (5) ein, so erhalten wir nach einfacher Umformung für $P(t)$ die VOLTERRASche Integralgleichung zweiter Art

$$z(P(t)) + \int_0^t K\{t - t_1\} \cdot P(t_1) dt_1 = v_0 t \quad (8)$$

mit dem Kern⁸⁾

$$K\{t - t_1\} = \frac{1}{m} (t - t_1) + \frac{2}{\pi \sqrt{\varrho S}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin^2(\lambda \pi s) \sin[k_\lambda(t - t_1)] \quad \left(k_\lambda = \frac{\lambda \pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\varrho}}\right) \quad (9).$$

(8) ist die Hauptgleichung des Anschlagvorganges; sie ist nichtlinear, es sei denn, daß man die (empirische) Funktion $z(P)$ in P linearisiert.

3. Rekursionsverfahren zur Lösung der Hauptgleichung auch im nichtlinearen Fall

Wie in [12] zerlegen wir die Grundschwingungsdauer T_G der freischwingenden Saite, die

$$T_G = \frac{2\pi}{k_1} = 2l \sqrt{\frac{\varrho}{S}} \quad (10)$$

beträgt, in eine genügend große fest gewählte Anzahl α kleiner Zeitintervalle τ , setzen also an

$$T_G = \alpha \tau \quad (11).$$

Der Zeitkoordinate t legen wir nur solche Werte bei, die Vielfache des durch (11) erklärten Zeitintervalles τ sind, nämlich

$$t = n \tau = \frac{n}{\alpha} T_G \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12).$$

Denken wir die unbekannte Druckkraft $P(t)$ in jedem Zeitintervall τ konstant gehalten, und führen wir mit

$$P_{v-1/2} = \frac{1}{2} (P_{v-1} + P_v) \quad (v = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

das arithmetische Mittel der Druckkräfte an den Enden des v -ten Zeitintervalles ein, so kann die Saitenauslenkung $\eta(s, t)$ nach (4) genähert durch

$$\eta_n(s) = \frac{2}{\pi \sqrt{\varrho S}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin^2(\lambda \pi s) \cdot \sum_{v=1}^n P_{v-1/2} \int_{(v-1)\tau}^{v\tau} \sin[k_\lambda(n\tau - t_1)] dt_1$$

⁷⁾ (3) und (4) ergeben sich bei Vernachlässigung der Rotationsträgheit ($\sigma = 0$) aus den Gleichungen (14) bzw. (15) in [12].

⁸⁾ Setzt man in Gleichung (19) der Abhandlung [12] $\sigma = 0$, so geht sie in die obenstehende Gleichung (9) über.

und nach Ausführung der Integration bei Beachtung von (2a) durch

$$\eta_n(s) = \frac{2l}{\pi^2 S} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\lambda \pi s) \cdot \sum_{\nu=1}^n P_{\nu-1/2} \{ \cos[k_{\lambda}(n-\nu)\tau] - \cos[k_{\lambda}(n-\nu+1)\tau] \} \quad (14)$$

dargestellt werden.

Im nächsten Abschnitt wird die Hilfsfunktion

$$\bar{S}(s, \mu) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\lambda \pi s) \cos(k_{\lambda} \mu \tau) \quad \left(0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \right) \quad (15)$$

in geschlossener Form angegeben. Mit (15) schreibt sich (14) übersichtlicher

$$\eta_n(s) = \frac{2l}{\pi^2 S} \sum_{\nu=1}^n P_{\nu-1/2} \{ \bar{S}(s, n-\nu) - \bar{S}(s, n-\nu+1) \} \quad (16).$$

Setzen wir weiter

$$A_{s, \mu+1/2} = \frac{2\alpha}{\pi^2} \{ \bar{S}(s, \mu) - \bar{S}(s, \mu+1) \} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots) \quad (17),$$

so erhalten wir, wie im nächsten Abschnitt ersichtlich ist, in $A_{s, \mu+1/2}$ einen bezüglich der Grundschwingungsdauer T_G in μ periodischen, stückweise konstanten Faktor. (17) ermöglicht, (16) auf die einfachere Form

$$\eta_n(s) = \frac{l}{\alpha S} \sum_{\nu=1}^n A_{s, n-\nu+1/2} \cdot P_{\nu-1/2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

zu bringen. Das bedeutet: Die Saitenauslenkung $\eta_n(s)$ ist einer bestimmten Linearkombination der Druckkraft-Mittelwerte $P_{\nu-1/2}$ der n vorausgegangenen Zeitintervalle proportional, in der die dimensionslosen Koeffizienten $A_{s, n-\nu+1/2}$ wesentlich von der Anschlagstelle s abhängen.

Bezeichnen wir Hammergeschwindigkeit und Hammerweg mit \dot{u}_n und u_n , sofern die Integrale in (6) und (7) — wie oben — unter Benutzung von (12) und (13) durch n -gliedrige Summen ersetzt werden, so ergibt sich

$$\dot{u}_n = v_0 - \frac{\tau}{m} \sum_{\nu=1}^n P_{\nu-1/2} \quad (19)$$

und

$$u = v_0 \cdot n \tau - \frac{\tau^2}{m} \sum_{\nu=1}^n \left(n - \nu + \frac{1}{2} \right) P_{\nu-1/2} \quad (20).$$

Bequemer sind die Rekursionsformeln

$$\dot{u}_n = \dot{u}_{n-1} - \frac{\tau}{m} \cdot P_{n-1/2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; \quad \dot{u}_0 = v_0) \quad (21)$$

und

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{2} (\dot{u}_{n-1} + \dot{u}_n) \tau \quad (n = 1, 2, 3, \dots; \quad u_0 = 0) \quad (22),$$

die mit (19) und (20) in Einklang stehen⁹⁾.

Wir berechnen den Anschlagvorgang, indem wir die fünf Größen \dot{u}_n , u_n , η_n , z_n , P_n in dieser Reihenfolge zunächst für $n = 1$, dann für $n = 2, 3, \dots$ successive annähern. Dazu benutzen wir neben (18), (21) und (22) die (5) entsprechende Beziehung $z_n = u_n - \eta_n$, ferner $P_n = P(z_n)$, wofür ein die Nachgiebigkeit des Hammers beschreibendes (nicht notwendig lineares) Eindringungsgesetz einzusetzen ist. Es gilt noch, den Annäherungsprozeß innerhalb des n -ten Schrittes zu fixieren. Wir bezeichnen die Näherungsordnung einer Größe durch eine in Klammern übersetzte Nummer; übersetzter Zirkumflex bedeute daneben die höchste bei der Berechnung einer Größe gebrauchte Näherungsordnung. Mit den Festsetzungen

$$\left. \begin{aligned} P_{k+1/2}^{(1)} &= \begin{cases} 0 & (k=0), \\ \frac{3}{2} \tilde{P}_k - \frac{1}{2} \tilde{P}_{k-1} & (k=1, 2, 3, \dots), \end{cases} \\ P_{k+1/2}^{(r+1)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{P}_k^{(r)} + \tilde{P}_{k+1}^{(r)} \right) & (k=0, 1, 2, \dots; \quad r=1, 2, 3, \dots), \\ \tilde{P}_{k+1/2} &= \frac{1}{2} (\tilde{P}_k + \tilde{P}_{k+1}) & (k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

⁹⁾ Wegen des Nachweises vgl. man [12], Text und Gleichungskette nach (35).

definieren wir

$$\tilde{u}_n^{(r)} = \tilde{u}_{n-1} - \frac{\tau}{m} P_{n-1/2}^{(r)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; \quad \tilde{u}_0 = v_0) \quad \dots \quad (24),$$

$$\tilde{u}_n^{(r)} = \tilde{u}_{n-1} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{n-1} + \tilde{u}_n^{(r)}) \tau \quad (n = 1, 2, 3, \dots; \quad \tilde{u}_0 = v_0; \quad \tilde{u}_0 = 0) \quad \dots \quad (25),$$

$$\eta_n^{(r)} = \frac{l}{\alpha S} \left\{ \sum_{s=1}^n (A_{s, n-r+1/2} \tilde{P}_{r-1/2}) + A_{s, 1/2} (\tilde{P}_{n-1/2}^{(r)} - \tilde{P}_{n-1/2}) \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (26),$$

$$z_n^{(r)} = \tilde{u} - \eta_n^{(r)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \quad (27),$$

$$P_n^{(r)} = P(z_n^{(r)}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \quad (28).$$

Von den in das Rechenverfahren eingehenden freien Parametern drücken wir τ und l/S auch durch andere Größen aus. Wenn ν_1 die Schwingungszahl des Grundtones der anzuschlagenden Saite bezeichnet, ergibt sich aus (11) wegen $T_G = 1/\nu_1$

$$\tau = \frac{1}{\alpha \nu_1} \quad \dots \quad (29).$$

Da sich die Saitenspannung S wegen (2a) aus

$$\nu_1^2 = \left(\frac{k_1}{2\pi} \right)^2 = \frac{S}{4 \varrho l^2} \quad \dots \quad (30)$$

zu $S = 4 \varrho l^2 \nu_1^2$ errechnet, erhält man nach Einführung der Saitenmasse $m' = \varrho l$

$$\frac{l}{S} = \frac{1}{4 m' \nu_1^2} \quad (m' = \varrho l) \quad \dots \quad (31).$$

4. Mathematischer Nachtrag

Die durch (15) eingeführte Hilfsfunktion soll in geschlossener Form dargestellt werden.

Wir formen zunächst das cos-Argument $k_\lambda \mu \tau$ um: Nach (11) und wegen $T_G = \frac{2\pi}{k_1}$ gilt mit (2a)

$$k_\lambda \tau = \frac{2\lambda\pi}{\alpha} \quad \dots \quad (32).$$

Setzen wir vorübergehend $\frac{\mu}{\alpha} = x$, so ist nach (15) und (32) die geschlossene Darstellung einer Funktion

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\lambda\pi x) \cos(2\lambda\pi x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right) \quad \dots \quad (33)$$

gesucht. Wir zeigen:

$$f(x) = -\frac{\pi^2}{2} \cdot \begin{cases} s^2 - s + x & (0 \leq x \leq s) \\ s^2 & (s \leq x \leq 1-s) \\ s^2 - s - x + 1 & (1-s \leq x \leq 1) \end{cases} \quad \dots \quad (34).$$

Zum Beweise entwickeln wir die Funktion $f(x)$ aus (34) in die FOURIER-Reihe $\sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda \cdot \cos(2\lambda\pi x)$. Für die FOURIER-Koeffizienten c_λ errechnet man

$$\begin{aligned} c_\lambda &= 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cos(2\lambda\pi x) dx \\ &= (-\pi^2) \left\{ \int_0^1 (s^2 - s + x) \cos(2\lambda\pi x) dx + \int_s^{1-s} s^2 \cos(2\lambda\pi x) dx + \int_{1-s}^1 (s^2 - s - x + 1) \cos(2\lambda\pi x) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{4\lambda^2} \{ -2 + \cos(2\lambda\pi s) + \cos[2\lambda\pi(1-s)] \} = \frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\lambda\pi s). \end{aligned}$$

Wegen der Periodizitätseigenschaft $\cos(2\lambda\pi x) = \cos[2\lambda\pi(x-p)]$ (p ganz) darf man in (33) und mithin auch in (34) auf der rechten Seite x durch $x-p$ ersetzen. Für die Hilfsfunktion

(15) besteht daher bei Benutzung von (32) sowie mit $0 \leq s \leq 1/2$ und $p \geq 0$, ganz, die geschlossene Darstellung

$$\bar{S}(s, \mu) = -\frac{\pi^2}{2} \cdot \begin{cases} s^2 - s + \frac{\mu}{\alpha} - p & \left(p \leq \frac{\mu}{\alpha} \leq p + s \right) \\ s^2 & \left(p + s \leq \frac{\mu}{\alpha} \leq p + 1 - s \right) \dots \dots (35). \\ s^2 - s - \frac{\mu}{\alpha} + p + 1 & \left(p + 1 - s \leq \frac{\mu}{\alpha} \leq p + 1 \right) \end{cases}$$

Nunmehr kann der durch (17) definierte Faktor $A_{s, \mu+1/2}$ mit Hilfe von (35) ebenfalls geschlossen dargestellt werden. Dabei unterscheiden wir die folgenden Fälle:

I. $s = 0$:

$$A_{0, \mu+1/2} = 0 \quad \mu = p\alpha, \dots, (p+1)\alpha - 1 \quad (p \geq 0, \text{ ganz}) \dots \dots (36).$$

II. $0 < s < \frac{1}{2}$:

a) αs nicht ganzzahlig, $1 \leq [\alpha s] \leq \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}$ ¹⁰⁾

$$A_{s, \mu+1/2} = \begin{cases} 1 & \mu = p\alpha, \dots, p\alpha + [\alpha s] - 1 \\ -[\alpha s] + \alpha s & \mu = p\alpha + [\alpha s] \\ 0 & \mu = p\alpha + [\alpha s] + 1, \dots, (p+1)\alpha - [\alpha s] - 2 \quad (p \geq 0, \text{ ganz}) \\ [\alpha s] - \alpha s & \mu = (p+1)\alpha - [\alpha s] - 1 \\ -1 & \mu = (p+1)\alpha - [\alpha s], \dots, (p+1)\alpha - 1 \end{cases} \quad (37),$$

b) αs ganzzahlig, $1 \leq \alpha s \leq \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}$

$$A_{s, \mu+1/2} = \begin{cases} 1 & \mu = p\alpha, \dots, p\alpha + \alpha s - 1 \\ 0 & \mu = p\alpha + \alpha s, \dots, (p+1)\alpha - \alpha s - 1 \quad (p \geq 0, \text{ ganz}) \\ -1 & \mu = (p+1)\alpha - \alpha s, \dots, (p+1)\alpha - 1 \end{cases} \quad (38).$$

III. $s = \frac{1}{2}$:

a) $\alpha/2$ nicht ganzzahlig, $\alpha \geq 3$

$$A_{1/2, \mu+1/2} = \begin{cases} 1 & \mu = p\alpha, \dots, \left(p + \frac{1}{2}\right)\alpha - \frac{3}{2} \\ 0 & \mu = \left(p + \frac{1}{2}\right)\alpha - \frac{1}{2} \\ -1 & \mu = \left(p + \frac{1}{2}\right)\alpha + \frac{1}{2}, \dots, (p+1)\alpha - 1 \end{cases} \quad (p \geq 0, \text{ ganz}) \quad (39),$$

b) $\alpha/2$ ganzzahlig, $\alpha \geq 2$

$$A_{1/2, \mu+1/2} = \begin{cases} 1 & \mu = p\alpha, \dots, \left(p + \frac{1}{2}\right)\alpha - 1 \\ -1 & \mu = \left(p + \frac{1}{2}\right)\alpha, \dots, (p+1)\alpha - 1 \end{cases} \quad (p \geq 0, \text{ ganz}) \quad (40).$$

5. Strenge Lösung der linearisierten Hauptgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation¹¹⁾

Da die Kern-Variablen der Hauptgleichung (8) nach (9) nur in Form der Differenz $t - t_1$ auftreten, liegt in (8) eine Integralgleichung vom Faltungstypus vor¹²⁾, deren linearisierte Form mit Hilfe der LAPLACE-Transformation eine geschlossene Lösung zuläßt.

¹⁰⁾ $[\alpha s]$ = größte ganze Zahl $\leq \alpha s$.

¹¹⁾ Für die Anregung dazu habe ich Herrn Prof. Dr.-Ing. J. DÖRR sehr zu danken.

¹²⁾ Man vgl. etwa G. DOETSCH, Hdb. d. Laplace-Transformation, Bd. I.

Wir linearisieren daher das (empirische) Gesetz über die Eindringung der Saite in den nachgiebigen Hammer durch den Ansatz

$$z(P) = h \cdot P \quad (h > 0, \text{ konstant}) \quad (41),$$

wobei h die Hammer-Nachgiebigkeit kennzeichnet, und schreiben damit die Hauptgleichung (8)

$$P(t) + \frac{1}{h} \int_0^t K\{t-t_1\} \cdot P(t_1) dt_1 = \frac{v_0}{h} t \quad (42).$$

Dem Kern (9) geben wir, indem wir unter Beachtung von (2a) und (10)

$$k_\nu = \frac{2\nu\pi}{w} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{mit} \quad w \equiv T_G \quad (43)$$

setzen, die Form

$$K\{t-t_1\} = \frac{1}{m} (t-t_1) + \frac{2}{\pi\sqrt{\varrho S}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin^2(\nu\pi s) \sin\left[\frac{2\nu\pi}{w} (t-t_1)\right] \quad \left(0 \leq s \leq \frac{1}{2}\right) \quad (44).$$

Da

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin^2(\nu\pi s) \sin(2\nu\pi x) = \frac{\pi}{4} \begin{cases} 1 & (p < x < p+s) \\ 0 & (p+s < x < p+1-s) \\ -1 & (p+1-s < x < p+1) \end{cases} \quad (p \geq 0, \text{ ganz}) \quad (45)$$

ist¹³⁾, ergibt sich für den Kern $K\{t-t_1\}$ die geschlossene Darstellung

$$K\{t-t_1\} = \frac{1}{m} (t-t_1) + \frac{1}{2\sqrt{\varrho S}} \cdot \begin{cases} 1 & pw < t-t_1 < (p+s)w \\ 0 & (p+s)w < t-t_1 < (p+1-s)w \\ -1 & (p+1-s)w < t-t_1 < (p+1)w \end{cases} \quad (p \geq 0, \text{ ganz}) \quad (46).$$

Wir wenden auf (42) die LAPLACE-Transformation an¹⁴⁾ und erhalten

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} P(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-xt} \left(\frac{1}{h} \int_0^t K\{t-t_1\} P(t_1) dt_1 \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} \cdot \frac{v_0}{h} t dt \quad (\Re(x) > 0).$$

Formt man das mittlere Glied um in

$$\int_0^{\infty} \int_{t_1}^{\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1}{h} K\{t-t_1\} P(t_1) dt dt_1 = \int_0^{\infty} e^{-xu} \cdot \frac{1}{h} K(u) du \cdot \int_0^{\infty} e^{-xt_1} \cdot P(t_1) dt_1$$

mit der Substitution $u = t - t_1$, so erkennt man, daß für die LAPLACE-Transformierten

$$P^*(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} P(t) dt, \quad K^*(x) = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-xu} K(u) du, \quad F^*(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{v_0}{h} t dt \quad (47)$$

die Gleichung

$$P^*(x) + K^*(x) \cdot P^*(x) = F^*(x)$$

besteht, der

$$P^*(x) = \frac{F^*(x)}{1 + K^*(x)} \quad (48)$$

¹³⁾ Denn: Setzt man etwa

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cdot \sin(2\nu\pi x) = \frac{\pi}{4} \cdot \begin{cases} 1 & (0 < x < s) \\ 0 & (s < x < 1-s), \\ -1 & (1-s < x < 1) \end{cases}$$

so hat man als FOURIER-Koeffizienten

$$c_\nu = 2 \left\{ \int_0^s \frac{\pi}{4} \cdot \sin(2\nu\pi x) dx + \int_{1-s}^1 \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(2\nu\pi x) dx \right\} = \frac{1}{\nu} \sin^2(\nu\pi s).$$

Damit wird (45), beachtet man $\sin(2\nu\pi x) = \sin[2\nu\pi(x-p)]$ ($p \geq 0$, ganz), bestätigt.

¹⁴⁾ Man vgl. z. B. W. SCHMEIDLER, Integralgln. in Phys. und Techn., § 16, S. 249/250.

zu entnehmen ist. Rücktransformation mittels der RIEMANN-MELLINSchen Umkehrformel¹⁵⁾ ergibt

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} P^*(x) \cdot e^{tx} dx \quad (i = \sqrt{-1}; \quad t > 0; \quad \eta > 0) \quad \dots \quad (49)$$

als Lösung der Hauptgleichung.

Um eine explizite Darstellung für $P(t)$ zu erhalten, hat man in (49) $P^*(x)$ nach (48) mit den LAPLACE-Transformierten $K^*(x)$ und $F^*(x)$ aus (47) einzusetzen. Für letztere ergibt sich

$$F^*(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \cdot \frac{v_0}{h} t dt = \frac{v_0}{h} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \dots \quad (50)$$

und, wenn man nach (46) $K(u) = \frac{1}{m} u + \Gamma(u)$ setzt und die Periodizitätseigenschaft $\Gamma(u) = \Gamma(u - pw)$ beachtet,

$$\begin{aligned} K^*(x) &= \frac{1}{h} \cdot \int_0^\infty e^{-xu} \cdot \left(\frac{1}{m} u + \Gamma \right) du \\ &= \frac{1}{h} \cdot \int_0^\infty e^{-xu} \cdot \frac{1}{m} u du + \frac{1}{h} \cdot \sum_{p=0}^\infty \int_{pw}^{(p+1)w} e^{-xu} \cdot \Gamma(u - pw) du. \end{aligned}$$

Führt man in dem zweiten Integral die Substitution $v = u - pw$ ein, so erhält man

$$K^*(x) = \frac{1}{mh} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{h} \cdot \sum_{p=0}^\infty \int_0^w e^{-x(v+pw)} \cdot \Gamma(v) dv.$$

Darin ist

$$\sum_{p=0}^\infty \int_0^w e^{-x(v+pw)} \cdot \Gamma(v) dv = \sum_{p=0}^\infty e^{-xpw} \cdot \int_0^w e^{-xv} \cdot \Gamma(v) dv$$

mit

$$\sum_{p=0}^\infty e^{-xpw} = \frac{1}{1 - e^{-xw}} \quad 16)$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^w e^{-xv} \cdot \Gamma(v) dv &= \int_0^{sw} e^{-xv} \cdot \frac{1}{2\sqrt{QS}} dv + \int_{(1-s)w}^w e^{-xv} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{QS}} \right) dv \\ &= \frac{1}{2\sqrt{QS}} \cdot \frac{1}{x} (1 - e^{-xws} - e^{-xw(1-s)} + e^{-xw}). \end{aligned}$$

Daher ergibt sich

$$K^*(x) = \frac{1}{mh} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2h\sqrt{QS}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-xw}} (1 - e^{-xws} - e^{-xw(1-s)} + e^{-xw}) \quad \dots \quad (51).$$

Setzt man (48) mit (50) und (51) in (49) ein, so erhält man die Lösung der Integralgleichung (42) nach Erweitern des Integranden mit x^2 in der expliziten Integralform

$$P(t) = \frac{v_0}{2\pi i h} \cdot \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{e^{tx} dx}{x^2 + \frac{x}{2h\sqrt{QS}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-xw}} (1 - e^{-xws} - e^{-xw(1-s)} + e^{-xw}) + \frac{1}{mh}} \quad (52).$$

Um zu praktisch brauchbaren Lösungen zu gelangen, formen wir den Integranden in (52) um. Es ist

$$\frac{1}{1 - e^{-xw}} (1 - e^{-xws} - e^{-xw(1-s)} + e^{-xw}) = 1 - \frac{e^{-xws} + e^{-xw(1-s)} - 2e^{-xw}}{1 - e^{-xw}}.$$

¹⁵⁾ Man vgl. etwa W. SCHMEIDLER, a. a. O., § 9, S. 116. Ausführlicheres steht bei G. DOETSCH, a. a. O., 4. Kap., § 4, S. 212, insbes. Satz 3.

¹⁶⁾ Mit $x = \eta + i\omega$ ist wegen der Voraussetzung $\Re(x) = \eta > 0$ $|e^{-xw}| = |e^{-(\eta + i\omega)w}| = e^{-\eta w} < 1$, so daß $\sum_{p=0}^\infty e^{-xpw}$ konvergiert.

Daher schreibt sich der Nenner des Integranden mit

$$q(x) = x^2 + \frac{x}{2h\sqrt{\varrho}S} + \frac{1}{mh} \quad \dots \quad (53)$$

auch in der Form

$$q(x) \cdot \left\{ 1 - \frac{x}{2h\sqrt{\varrho}S} \cdot \frac{e^{-xws} + e^{-xw(1-s)} - 2e^{-xw}}{q(x) \cdot (1 - e^{-xw})} \right\}.$$

Wählt man $\eta > 0$ genügend groß, so ist die Entwicklung des Integranden in die Reihe

$$\frac{e^{tx}}{q(x)} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x(e^{-xws} + e^{-xw(1-s)} - 2e^{-xw})}{2h\sqrt{\varrho}S q(x)(1 - e^{-xw})} \right)^r$$

auf dem Integrationsweg $\Re(x) = \eta$ gleichmäßig konvergent¹⁷⁾. Dann ist gliedweise Integration zulässig und führt zu

$$P(t) = \frac{v_0}{2\pi i h} \cdot \left\{ \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{e^{tx}}{q(x)} dx + \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{x}{2h\sqrt{\varrho}S} \cdot \frac{e^{(t-ws)x} + e^{(t-w(1-s))x} - 2e^{(t-w)x}}{q^2(x)(1 - e^{-xw})} dx \right. \\ \left. + \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{x^2}{4h^2\varrho S} \cdot \frac{e^{(t-2ws)x} + \dots}{q^3(x)(1 - e^{-xw})^2} dx + \dots \right\} \quad \dots \quad (54).$$

Aus der Darstellung (54) der Lösung in entwickelter Integralform kann man intervallweise gültige Lösungen entnehmen, wozu das folgende als Beispiel diene.

Für das Intervall $0 < t < ws$ besteht die Lösung nur aus dem Gliede

$$P(t) = \frac{v_0}{2\pi i h} \cdot \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{e^{tx}}{q(x)} dx \quad (0 < t < ws) \quad \dots \quad (55).$$

Die folgenden Glieder der Entwicklung (54) verschwinden, da nach Voraussetzung $t - ws < 0$ und daher wegen $0 \leq s \leq 1/2$ auch alle weiteren Faktoren bei x in den Exponenten der Zähler negativ ausfallen¹⁸⁾.

Für das Intervall $ws < t < w \cdot \min(2s, 1-s)$ lautet die Lösung

$$P(t) = \frac{v_0}{2\pi i h} \cdot \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{e^{tx}}{q(x)} dx + \frac{v_0}{4\pi i h^2 \sqrt{\varrho} S} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{x}{q^2(x)} e^{(t-ws)x} dx \quad \dots \quad (56).$$

$(ws < t < w \cdot \min(2s, 1-s))$
 $0 \leq s \leq 1/2$

Die auftretenden Integrale können mit Hilfe elementarer Funktionen ausgedrückt werden. Sind $x = a$ und $x = b$ die Nullstellen von $q(x)$ — man vgl. (53) —, so läßt der Integrand in (55) wegen

$$q(x) = (x - a)(x - b) \quad \dots \quad (57)$$

die Partialbruch-Darstellung

$$\frac{e^{tx}}{q(x)} = \begin{cases} \frac{e^{tx}}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) & (a \neq b) \\ \frac{e^{tx}}{(x-a)^2} & (a = b) \end{cases} \quad \dots \quad (58)$$

¹⁷⁾ In der rechten Halbebene, d. h. für x -Werte mit $\Re(x) > 0$ gibt es keine singulären Stellen; denn $q(x)$ hat nur positive Koeffizienten, und $1 - e^{-xw}$ verschwindet nur für $x = -2\pi i/w$ (k ganz).

¹⁸⁾ In der Umkehrformel $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{tx} \cdot f(x) dx = y(t)$ der einseitigen LAPLACE-Transformation $\int_0^\infty e^{-xt} y(t) dt = f(x)$ ist $y(t) = 0$ zu setzen für $t < 0$. Man vgl. hierzu die unter ¹⁵⁾ angeführten Literaturstellen.

zu. Der Integrand des zweiten Integrales in (56) erlaubt die Partialbruch-Darstellung

$$\frac{x}{q^2(x)} \cdot e^{(t-ws)x} = \begin{cases} \frac{e^{(t-ws)x}}{(a-b)^3} \left(-\frac{a+b}{x-a} + \frac{a(a-b)}{(x-a)^2} + \frac{a+b}{x-b} + \frac{b(a-b)}{(x-b)^2} \right) & (a \neq b) \\ e^{(t-ws)x} \left(\frac{1}{(x-a)^3} + \frac{a}{(x-a)^4} \right) & (a = b) \end{cases} \quad (59).$$

Die Integrale in (55) und (56) sind nun ohne weiteres nach dem Residuensatz auszuwerten¹⁹⁾. Wegen (58) ergibt sich aus (55)

$$P(t) = P_I(t) \quad (0 < t < ws) \quad \dots \quad (60)$$

mit

$$P_I(t) = \begin{cases} \frac{v_0}{h(a-b)} (e^{at} - e^{bt}) & (a \neq b) \\ \frac{v_0}{h} t e^{at} & (a = b) \end{cases} \quad \dots \quad (61).$$

Darin ist nach (53) und (57)

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{4h\sqrt{\varrho S}} \cdot (-1 + \sqrt{\Delta}) \\ b &= \frac{1}{4h\sqrt{\varrho S}} \cdot (-1 - \sqrt{\Delta}) \end{aligned} \right\} \quad (\Delta = 1 - 16hS\varrho/m) \quad \dots \quad (62).$$

Entsprechend ergibt sich wegen (59) aus (56)

$$P(t) = P_I(t) + P_{II}(t) \quad (ws < t < w \cdot \min_{0 \leq s \leq 1/2} (2s, 1-s)) \quad \dots \quad (63)$$

mit $P_I(t)$ nach (61) und

$$P_{II}(t) = \begin{cases} \frac{v_0(a+b)}{2h^2\sqrt{\varrho S}(a-b)^3} \left[\left(-1 + \frac{a(a-b)}{a+b} \bar{t} \right) e^{a\bar{t}} + \left(1 + \frac{b(a-b)}{a+b} \bar{t} \right) e^{b\bar{t}} \right] & (a \neq b) \\ \frac{v_0}{2h^2\sqrt{\varrho S}} \left(\frac{\bar{t}^2}{2} + a \frac{\bar{t}^3}{6} \right) e^{a\bar{t}} & (a = b) \end{cases} \quad (64),$$

wobei zur Abkürzung

$$\bar{t} = t - ws \quad \dots \quad (65)$$

gesetzt ist. Lösungen für weitere Intervalle sind aus (54) ohne Schwierigkeit, wenn auch nicht ohne Mühe, herzuleiten.

Die Gültigkeit der Darstellungen (60) und (63) auf je ein offenes Intervall zu beschränken ist nötig, weil $P(t)$ keine durchweg analytische Funktion ist. Während nämlich nach (61), (62) und (64) im Falle des gemäß (41) nachgiebigen Hammers erst die zweite Ableitung, $P''(t)$, Sprungstellen an den Intervallenden aufweist²⁰⁾, ist im Falle des starren Hammers ($h \rightarrow 0$ und damit $b \rightarrow -\infty$) bereits die Funktion $P(t)$ selbst an den Intervallenden unstetig²¹⁾.

Physikalisch betrachtet stellt (60) den Verlauf der Kraft, mit der der Hammer auf die Saite drückt, vom Anschlagbeginn an dar, solange die vom näheren Saitenende zu reflektierende Störungswelle noch nicht zur Anschlagstelle zurückgekehrt ist. (63) gibt demgegenüber den Druckkraftverlauf für die Zeitspanne an, nachdem die vom näheren Saitenende reflektierte Störungswelle das erste Mal und solange weder diese zum zweiten Male, noch die vom entfernteren Saitenende reflektierte Welle erstmalig die Anschlagstelle erreicht haben.

Wie ein Vergleich mit der Saitenanschlag-Theorie von P. Das²²⁾ zeigt, sind die Ergebnisse seiner und der Theorie dieses Kapitels, wenn auch auf durchaus verschiedenen Wegen gewonnen, inhaltlich gleichwertig. Allerdings beschränkt sich P. Das bei der Entwicklung der Theorie zunächst auf den Fall, daß die vom entfernteren Saitenende reflektierte Welle erst nach Ablauf der Berührungsdauer zur Anschlagstelle zurückkehrt, dann unter gewissen Vernachlässigungen darauf, daß die vom entfernteren Saitenende reflektierte Welle nicht öfter als einmal

¹⁹⁾ Das ist in allgemeinerer Form geschehen bei G. DOETSCH, a. a. O., 7. Kap., § 3, S. 272.

²⁰⁾ Z. B. ist $P''(t)_{t=ws+0} - P''(t)_{t=ws-0} = \frac{v_0}{2h^2\sqrt{\varrho S}}$ für $\begin{cases} a \neq b \\ a = b \end{cases}$.

²¹⁾ Dazu vgl. man ²⁵⁾, insbesondere für $t \rightarrow 0$.

²²⁾ Man vgl. P. Das, [4].

während der Berührungsdauer zur Anschlagstelle zurückkommt. Auch die von P. DAS nicht behandelten Fälle werden von der geschlossenen Form der Lösung (52) umfaßt. Gemeinsam ist der von P. DAS und der in diesem Abschnitt dargelegten Theorie neben der geringen praktischen Handlichkeit, daß sie wesentlich an die Hypothese der Proportionalität zwischen Anschlagkraft und Eindringungstiefe der Saite in den nachgiebigen Hammer gebunden sind.

Zu ausgedehnten numerischen Rechnungen sollen die aus (54) gewonnenen bzw. zu gewinnenden geschlossenen Formeln nicht herangezogen werden, da die Rechenarbeit von Intervall zu Intervall scheußlich anwächst²³). Gleichwohl bieten die geschlossenen Formeln die Möglichkeit, die Güte der Konvergenz des Rekursionsverfahrens zu beurteilen und vom Rekursionsverfahren unabhängige Rechenkontrollen zu beschaffen²⁴).

6. Konvergenzverhalten des Rekursionsverfahrens

Entwickeln wir $P(t)$ gemäß (60) und (61) im Intervall $0 < t < w s$ nach t , indem wir $\Delta \neq 0$ und $h > 0$ voraussetzen²⁵), so ergibt sich

$$P(t) = \frac{v_0}{h} t \left\{ 1 + \frac{1}{2} (a + b) t + \frac{1}{6} (a^2 + a b + b^2) t^2 + \dots \right\} \quad (0 < t < w s)$$

und mit (62)

$$P(t) = \frac{v_0}{h} t \left(1 - \frac{1}{4 h \sqrt{\varrho} S} t + \frac{1 - 4 h S \varrho / m}{24 h^2 \varrho S} t^2 + \dots \right) \quad (0 < t < w s) \quad \dots (66).$$

Aussagen über die Art der Konvergenz des Rekursionsverfahrens sind zu erwarten, sobald wir auch $P_n^{(r)}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ nach dem Formelsatz (23) bis (28) nach Potenzen von $n\tau$ entwickeln. Beachten wir, daß in (26)

$$\frac{l}{S} = \frac{\alpha \tau}{2 \sqrt{\varrho} S} \quad (26) \quad \dots \quad (67)$$

gesetzt werden kann, und ersetzen wir (28) durch

$$P_n^{(r)} = \frac{1}{h} \cdot z_n^{(r)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)^{27)} \quad \dots \quad (68),$$

so ergibt sich die gesuchte Entwicklung. Für $n = 1$ erhält man als Größen der ersten Näherung

$$\dot{u}_1^{(1)} = v_0, \quad u_1^{(1)} = v_0 \tau, \quad \eta_1^{(1)} = 0, \quad z_1^{(1)} = v_0 \tau, \quad P_1^{(1)} = \frac{v_0}{h} \tau,$$

als solche der zweiten und dritten Näherung²⁸)

$$\dot{u}_1^{(2)} = v_0 \left(1 - \frac{\tau^2}{2 m h} \right), \quad u_1^{(2)} = v_0 \tau \left(1 - \frac{\tau^2}{4 m h} \right), \quad \eta_1^{(2)} = \frac{v_0 \tau^2}{4 h \sqrt{\varrho} S}, \quad P_1^{(2)} = \frac{v_0 \tau}{h} \left(1 - \frac{\tau}{4 h \sqrt{\varrho} S} + \dots \right)$$

und

$$\dot{u}_1^{(3)} = v_0 \left(1 - \frac{\tau^2}{2 m h} + \dots \right), \quad u_1^{(3)} = v_0 \tau \left(1 - \frac{\tau^2}{4 m h} + \dots \right), \quad \eta_1^{(3)} = v_0 \tau \left(\frac{\tau}{4 h \sqrt{\varrho} S} - \frac{\tau^2}{16 h^2 \varrho S} + \dots \right),$$

$$P_1^{(3)} = \frac{v_0 \tau}{h} \left(1 - \frac{1}{4 h \sqrt{\varrho} S} \tau + \frac{1 - 4 h S \varrho / m}{16 h^2 \varrho S} \tau^2 + \dots \right).$$

Durch Schluß von n auf $n + 1$ ist nachweisbar:

²³) Gerade das ist längst nicht im gleichen Maße der Fall bei Verwendung des Satzes Rekursionsformeln (24) bis (28). Diese erweisen sich auch als vorteilhafter zum Programmieren der Rechenarbeit beim Gebrauch von Rechenautomaten.

²⁴) Eine Gegenüberstellung numerischer Ergebnisse, die durch die geschlossenen Formeln gewonnen sind, mit den entsprechenden, die dem Rekursionsverfahren entstammen, befindet sich im Anhang.

²⁵) Während die erste Vorauss. harmlos ist — im Falle $\Delta = 0$ liegt eine hebbare Unstetigkeit vor —, ist die zweite wesentlich. Für $h \rightarrow 0$ ergibt sich aus (60) bis (62) anstelle von (66)

$$P(t) = 2 v_0 \sqrt{\varrho} S \left(1 - \frac{2 \sqrt{\varrho} S}{m} t + \dots \right) \quad (0 < t < w s).$$

²⁶) Nach (29) gilt $1 = \alpha \tau \cdot v_1$ und nach (30) $v_1 = \frac{1}{2 l} \sqrt{\frac{S}{\varrho}}$. Damit erhält man (67) aus (31).

²⁷) Dieser Ansatz steht in Einklang mit (41).

²⁸) Die explizite Angabe der $z_1^{(2)}, z_1^{(3)}, \dots$ erübrigt sich.

Von der Näherungsordnung $r = 3$ an²⁹⁾ gilt für das Intervall $1 \leq n < \frac{ws}{\tau}$ und $h > 0$

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_n^{(r)} &= v_0 \left\{ 1 - \frac{(n\tau)^2}{2mh} + \dots \right\}, \\ u_n^{(r)} &= v_0 \cdot n\tau \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) \cdot \frac{(n\tau)^2}{6mh} + \dots \right\}, \\ \eta_n^{(r)} &= v_0 \cdot n\tau \left\{ \frac{n\tau}{4h\sqrt{\varrho S}} - \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) \cdot \frac{(n\tau)^2}{24h^2\varrho S} + \dots \right\}, \\ z_n^{(r)} &= u_n^{(r)} - \eta_n^{(r)}, \\ P_n^{(r)} &= \frac{v_0}{h} \cdot n\tau \left\{ 1 - \frac{n\tau}{4h\sqrt{\varrho S}} + \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) \cdot \frac{1-4hS\varrho/m}{24h^2\varrho S} (n\tau)^2 + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots (69).$$

Der Vergleich mit der strengen Entwicklung (66) zeigt

$$P(n\tau) - P_n^{(r)} = A \cdot n\tau^3 + (\dots) \cdot \tau^4 \quad \left(1 \leq n < \frac{ws}{\tau}; \quad r \geq 3 \right) \dots (70)$$

mit

$$A = -\frac{v_0}{h} \cdot \frac{1-4hS\varrho/m}{48h^2\varrho S} \dots (71).$$

Daher ist

$$P\left(2n \cdot \frac{\tau}{2}\right) - P_{2n}^{(r)} = A \cdot 2n \left(\frac{\tau}{2}\right)^3 + \dots = \frac{1}{4} A \cdot n\tau^3 + \dots \quad \left(1 \leq n < \frac{ws}{\tau}; \quad r \geq 3 \right) \quad (72).$$

Der in (70) und (72) zutage tretende Sachverhalt ist nicht auf das Intervall $1 \leq n < \frac{ws}{\tau}$ beschränkt. Um das zu zeigen, entnehmen wir (63) mit (61) und (64) die strenge Entwicklung für das Intervall $ws < t < w \cdot \min_{0 \leq s \leq 1/2} (2s, 1-s)$. Es ergibt sich

$$P(t) = \frac{v_0}{h} \left\{ t - \frac{t^2 - (t - ws)^2}{4h\sqrt{\varrho S}} + \frac{(1-4hS\varrho/m)t^3 - 2(t - ws)^3}{24h^2\varrho S} + \dots \right\} \dots (73).$$

Während die Entwicklung der Größen $\dot{u}_n^{(r)}$ und $u_n^{(r)}$ nach $n\tau$ unter Benutzung des Rekursionsverfahrens auch in einem gewissen Intervalle $\frac{ws}{\tau} < n$ keine Korrektur an den in (69) angegebenen Entwicklungskoeffizienten verlangt, findet man z. B., falls $\frac{ws}{\tau}$ ganzzahlig ist³⁰⁾, für ein bestimmtes Intervall $\frac{ws}{\tau} < n$ mit $n' = n - \frac{ws}{\tau}$

$$\left. \begin{aligned} \eta_n^{(r)} &= v_0 \cdot \left\{ \frac{(n\tau)^2 - (n'\tau)^2}{4h\sqrt{\varrho S}} - \frac{\left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) (n\tau)^3 - 2 \left(1 + \frac{1}{2n'^2} \right) (n'\tau)^3}{24h^2\varrho S} + \dots \right\}, \\ P_n^{(r)} &= \frac{v_0}{h} \cdot \left\{ n\tau - \frac{(n\tau)^2 - (n'\tau)^2}{4h\sqrt{\varrho S}} + \frac{\left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) (1-4hS\varrho/m) (n\tau)^3 - 2 \left(1 + \frac{1}{2n'^2} \right) (n'\tau)^3}{24h^2\varrho S} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} (74).$$

Aus (73) und (74) folgt für das betreffende Intervall

$$P(n\tau) - P_n^{(r)} = -\frac{v_0}{h} \cdot \frac{(1-4hS\varrho/m)n - 2n'}{48h^2\varrho S} \tau^3 + (\dots) \cdot \tau^4 \dots (75).$$

²⁹⁾ Für $2 \leq n < \frac{ws}{\tau}$ sind die angegebenen Entwicklungskoeffizienten sogar von $r = 2$ an „endgültig“.

³⁰⁾ Dann ist der in (26) auftretende Koeffizient $A_{s, \mu+1/2}$ ($\mu = 1, 2, 3, \dots$) im Falle $0 < s < \frac{1}{2}$ (38), im Falle $s = \frac{1}{2}$ (40) zu entnehmen.

Das Rekursionsverfahren ist also nach (70) und (75) in dem Sinne exakt zu nennen, daß sich bei hinreichend klein gewählter Schrittweite τ die $P_n^{(r)}$ ($r \geq 3$, ganz) um beliebig wenig von den $P(n\tau)$ unterscheiden. Dagegen konvergieren die Iterationswerte $P_n^{(r)}$ (n fest, $r = 1, 2, 3, \dots$) wegen des Summanden $1/2 n^2$ im Koeffizienten des kubischen Gliedes nicht gegen $P(n\tau)$. Daher kann man nicht durch Erhöhung der Anzahl der Iterationen über $r = 3$ hinaus den Fehler aufheben, der durch die benutzte Schrittweite τ bedingt ist. Unberührt bleibt nach (70) und (75) die Faustregel, das Rekursionsverfahren so oft mit der halben Schrittweite der vorausgehenden Rechnung zu wiederholen, bis die Unterschiede einander entsprechender Ergebnisse erträglich sind³¹⁾.

7. Approximative Amplitudenberechnung

Nachdem wir in den Abschnitten 2 bis 6 gesehen haben, wie die Druckkraft $P(t)$ beliebig genau berechnet werden kann, kehren wir zur Frage nach der Größe der Amplituden α_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$) aus dem ersten Abschnitt zurück.

Um die a_λ aus (1) approximativ zu berechnen, ersetzen wir die Integrale in (2) nach dem Vorgehen im 3. Abschnitt durch Summen und die Berührungsdauer t_B entsprechend (12) durch $n_B \cdot \tau$. Wegen

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ist dabei

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{n_B} P_{v-1/2} \int_{t_1=(v-1)\tau}^{v\tau} \sin [k_\lambda (t_B - t_1)] dt_1 &= \frac{1}{k_\lambda} \cdot \sum_{v=1}^{n_B} P_{v-1/2} \{ \cos [k_\lambda (n_B - v) \tau] - \cos [k_\lambda (n_B - v + 1) \tau] \} \\ &= \frac{2}{k_\lambda} \sin \left(k_\lambda \frac{\tau}{2} \right) \cdot \sum_{v=1}^{n_B} P_{v-1/2} \sin \left[k_\lambda \left(n_B - v + \frac{1}{2} \right) \tau \right] \end{aligned}$$

und wegen

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

entsprechend

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{n_B} P_{v-1/2} \int_{t_1=(v-1)\tau}^{v\tau} \cos [k_\lambda (t_B - t_1)] dt_1 &= -\frac{1}{k_\lambda} \cdot \sum_{v=1}^{n_B} P_{v-1/2} \{ \sin [k_\lambda (n_B - v) \tau] - \sin [k_\lambda (n_B - v + 1) \tau] \} \\ &= +\frac{2}{k_\lambda} \sin \left(k_\lambda \frac{\tau}{2} \right) \cdot \sum_{v=1}^{n_B} P_{v-1/2} \cos \left[k_\lambda \left(n_B - v + \frac{1}{2} \right) \tau \right]. \end{aligned}$$

Setzt man diese Summendarstellungen in (2) ein, so ergibt sich mit (2a) und (32) für genügend großes α beliebig genau

$$\int_{\sin, \cos} \cong \frac{2l}{\lambda \pi} \sqrt{\frac{\rho}{S}} \cdot \sin \left(\frac{\lambda \pi}{\alpha} \right) \cdot \sum_{v=1}^{n_B} P_{v-1/2} \cdot \frac{\sin \left[\frac{2\lambda \pi}{\alpha} \left(n_B - v + \frac{1}{2} \right) \right]}{\cos \left[\frac{2\lambda \pi}{\alpha} \left(n_B - v + \frac{1}{2} \right) \right]} \dots \dots \dots (76)$$

und daher nach (1)

$$a_\lambda \cong \frac{4l}{\pi^2 S} \cdot \frac{|\sin(\lambda \pi s)|}{\lambda^2} \cdot \left| \sin \left(\frac{\lambda \pi}{\alpha} \right) \right| \cdot \sqrt{\sum_{\sin}^{(\lambda)} + \sum_{\cos}^{(\lambda)}} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \dots (77)$$

mit

$$\sum_{\sin, \cos}^{(\lambda)} = \sum_{v=1}^{n_B} P_{v-1/2} \cdot \frac{\sin \left[\frac{2\lambda \pi}{\alpha} \left(n_B - v + \frac{1}{2} \right) \right]}{\cos \left[\frac{2\lambda \pi}{\alpha} \left(n_B - v + \frac{1}{2} \right) \right]} \dots \dots \dots (78).$$

Denkt man $P_{v-1/2}$ durch $P_{v-1/2}^{(\tau+1)}$ nach (23) ersetzt³²⁾, so können die Formeln (78) praktisch benutzt werden, sobald die $P_{v-1/2}^{(\tau+1)}$ ($v = 1, 2, 3, \dots$) mit Hilfe des Rekursionsverfahrens (24) bis (28) berechnet sind.

³¹⁾ Setzt man $P(n\tau) = P_n^{(r)} + R(\tau)$, $P\left(2n \cdot \frac{\tau}{2}\right) = P_{2n}^{(r)} + R\left(\frac{\tau}{2}\right)$, so ist, da für genügend kleines τ nach (70) und (72) $R(\tau) \approx 4 R\left(\frac{\tau}{2}\right)$ gilt, $P_n^{(r)} + 4 R\left(\frac{\tau}{2}\right) \approx P_{2n}^{(r)} + R\left(\frac{\tau}{2}\right)$ oder $R\left(\frac{\tau}{2}\right) \approx \frac{1}{3} \left(P_{2n}^{(r)} - P_n^{(r)} \right)$.

³²⁾ Nach dem letzten Absatz des 6. Abschn. ist $r = 3$ zweckmäßig.

8. Numerische Auswertung

Wir suchen zunächst unter den Parametern ein System von Größen aus, durch das die Hammer-Druckkraft $P(t)$ und die Amplituden a_λ der angeregten Saiten-Partialschwingungen bestimmt werden: Explizit treten in den Rekursionsformeln (24) bis (28) die Parameter v_0 , τ , m , l/S , $A_{s,n-v+1/2}$ und r auf. τ hängt nach (29) von α und v_1 , l/S nach (31) ferner von m' , $A_{s,n-v+1/2}$ nach (36) bis (40) außerdem von s ab. Ersetzen wir im Sinne einer Linearisierung (28) durch (68), so haben wir noch den Parameter h^{33} .

Zu unterscheiden sind Parameter mit physikalischer Bedeutung von solchen, die lediglich das Rechenverfahren betreffen. Beginnen wir mit diesen: r und α ! Es genügt, r die Zahlen 1, 2, 3 durchlaufen zu lassen³⁴). α wählen wir so groß, daß sich $P_n^{(3)}$ um genügend wenig von $P(n\tau)$ unterscheidet. Dazu überprüfen wir, ob die Differenz $P_{2n}^{(3)} - P_n^{(3)}$ in der $P_{2n}^{(3)}$ die $P_n^{(3)}$ zeitlich entsprechende, doch nach Verdoppelung von α errechnete Druckkraft bedeute, dem Betrage nach genügend klein ist³⁵).

Unter den physikalischen Parametern wählen wir zur Kennzeichnung des Anschlagesvorganges das System

$$v_0, s; \quad m, h; \quad m', v_1 \quad \dots \quad (79)$$

aus. Darin charakterisieren die ersten beiden Größen die Art und Weise des Anschlages, die dritte und vierte den Hammer und die letzten beiden die Saite.

Leicht zu übersehen ist der Einfluß des Parameters v_0 , sofern (41) erfüllt ist. Aus (42) folgt unmittelbar, daß $P(t)$ proportional v_0 ist. (1) und (2) entnimmt man weiter, daß dann auch die a_λ proportional v_0 sind. Um zu untersuchen, wie die übrigen Parameter aus (79) $P(t)$ und a_λ beeinflussen, wurde eine Anzahl Rechnungen an der Darmstädter elektronischen Rechanlage IBM 650 ausgeführt³⁶). Folgende (mit a indizierte) „Ausgangswerte“³⁷) der Parameter (79) liegen den Rechnungen zugrunde:

$$\left. \begin{aligned} v_{0a} &= 1,40 \cdot 10^2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, & s &= \frac{1}{8}, \\ m_a &= 7,98 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kp sec}^2}{\text{cm}}, & h_a &= \frac{1}{17} \frac{\text{cm}}{\text{kp}}^{38}), \\ m'_a &= 1,252 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kp sec}^2}{\text{cm}}^{39}), & v_{1a} &= 0,435 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \right\} \dots \quad (80).$$

$P(t)$ wurde nach den Gleichungen (23) bis (31) mit (37) bis (40), a_λ anschließend nach (77) und (78) berechnet. Dabei wurde (28) durch (68) und $P_{v-1,2}$ durch $P_{v-1/2}^{(4)}$ ersetzt. Eine Auswahl der Ergebnisse ist in den Bildern 1 bis 10 zusammengestellt.

In den Bildern 1 bis 4 wird $P(t)$ in Abhängigkeit von der Anschlagstelle s dargestellt. Die übrigen Parameter sind in den Werten (80) konstant gehalten. Bild 1 und 2 lassen erkennen, wie gegen Ende der ersten Grundswingungsdauer ($T_G = 23,0 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$) mit zunehmendem s zunächst ein Druckkraft-„Höcker“ heranwächst. Der Ansatz zu ihm (am betreffenden Kurvenwendepunkt) beginnt in dem Augenblick, in dem die Störungswelle, die an dem der Anschlagstelle entfernteren Saitenende reflektiert wird, erstmals zum Hammer zurückkehrt. Schon vorher sind, jedesmal wenn die am näheren Saitenende reflektierte Störungswelle zur Anschlagstelle zurückkehrt, Extrema des Druckkraft-Anstieges zu verzeichnen.

Falls der Anschlag in der Nähe der Saitenmitte erfolgt (Bild 3 und 4), sind die Schwankungen des Druckkraft-Anstieges und selbst der Druckkraft besonders ausgeprägt. Mit der Annäherung der Anschlagstelle an die Saitenmitte wächst die Berührungsdauer nahezu monoton. Eine Abnahme der Berührungsdauer, kurz bevor die Anschlagstelle die Saitenmitte erreicht

³³) Stellt man $P(z)$ durch ein Polynom zweiten oder höheren Grades dar, so kommen durch die Koeffizienten ersichtlich weitere Parameter hinzu.

³⁴) Man vgl. den letzten Absatz des 6. Abschn.

³⁵) Man vgl. auch ²⁴).

³⁶) Die Programme für den Elektronen-Rechner befinden sich im Anhang der unverkürzten Dissertation.

³⁷) Durch sie werden z. T. die Gegebenheiten des normalen Klaviers berücksichtigt.

³⁸) Man vgl. W. LANGE, [8], S. 121. Das Eindringungsgesetz $z = h \cdot P$ mit $h = \frac{1}{17} \frac{\text{cm}}{\text{kp}}$ und $0 \leq P < 1,4 \text{ kp}$ nähert die empirische, nahezu lineare Eindringungsfunktion des Hammers 6 im Belastungsfall an. Die Hysterese wird hier vernachlässigt.

³⁹) Dieser Wert ergibt sich z. B. bei einer zylindr. Stahlsaite von 20 cm Länge und 0,1 cm Dicke.

⁴⁰) Man vgl. die mittlere Gleichung von (23).

hat, ist jedoch unverkennbar⁴¹⁾. P. DAS, [4], beschränkt die Anschlagtheorie auf Fälle, in denen die vom entfernten Saitenende reflektierte Störungswelle höchstens einmal zur Anschlagstelle zurückkehrt; bei einem Anschlag, der nicht genügend nahe einem Saitenende erfolgt, kommt aber die vom entfernten Ende zurückgeworfene Welle auch ein zweites Mal zum Hammer zurück, wenn die Parameter außer s die Werte (80) haben.

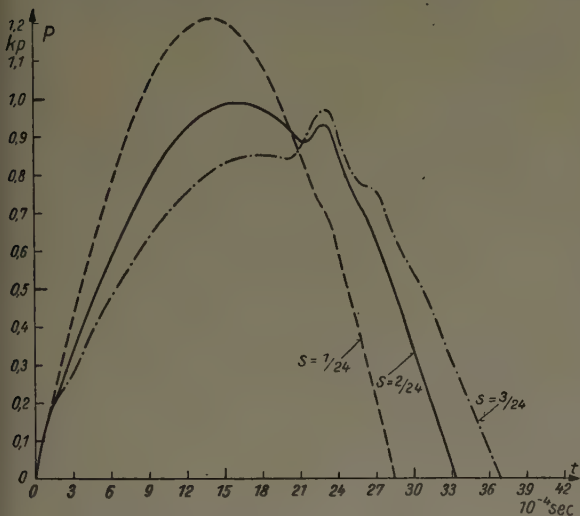


Bild 1. Zeitlicher Verlauf der Kraft P , mit der der Hammer auf die Saite drückt, in Abhängigkeit von der relativen Anschlagstelle s

Parameter — außer s — wie in (80)

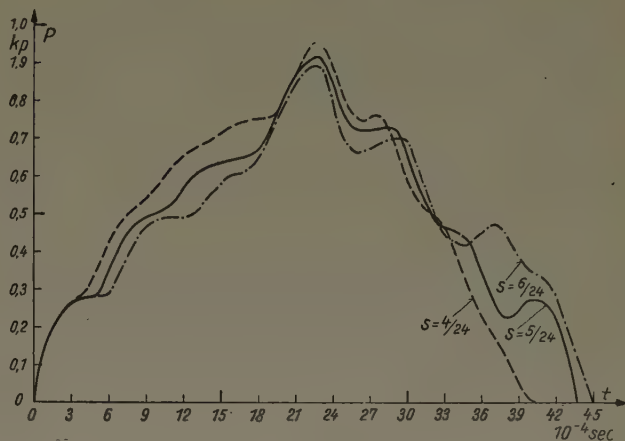


Bild 2. Beschreibung siehe Bild 1

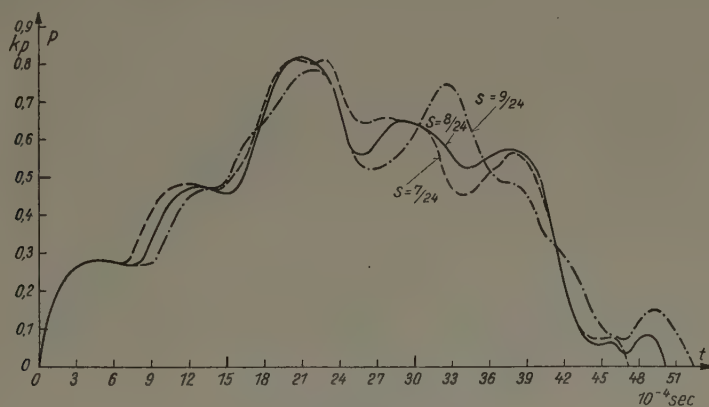


Bild 3. Beschreibung siehe Bild 1

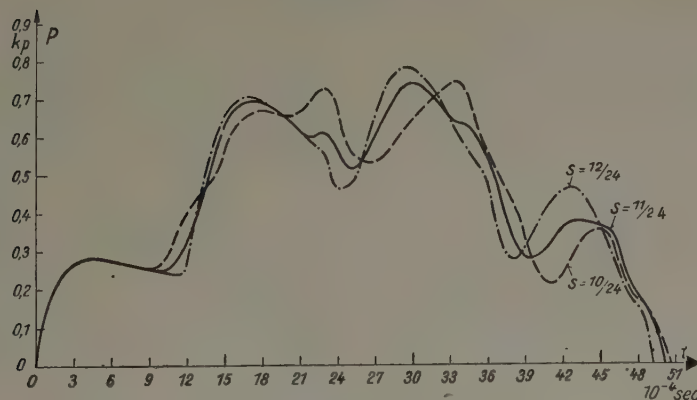


Bild 4. Beschreibung siehe Bild 1

Die Bilder 5 bis 8 zeigen $P(t)$ in Abhängigkeit von je einem der Parameter der Hammermasse m , der Hammer-Nachgiebigkeit h , der Saitenmasse m' und der Saitengrundfrequenz ν_1 .

⁴¹⁾ Dieses unmonotone Verhalten der Berührungsdauer beim Annähern der Anschlagstelle an die Saitenmitte wird schon beschrieben von C. V. RAMAN und B. BANERJI, [2], allerdings für den starren Hammer ($h \rightarrow 0$).

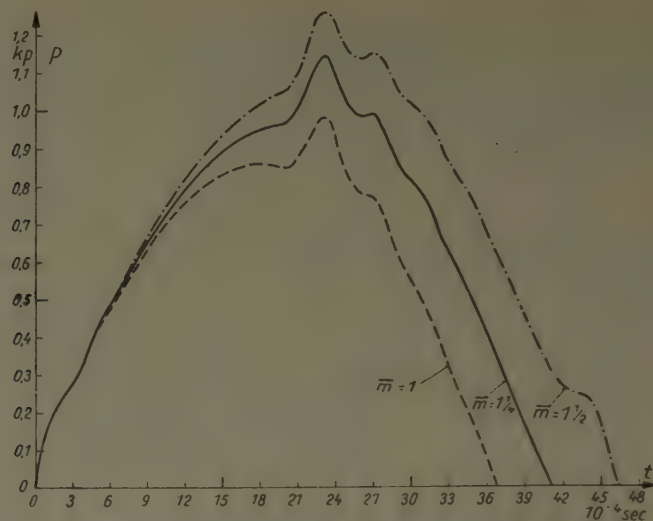


Bild 5. Zeitlicher Verlauf der Kraft P , mit der der Hammer auf die Saite drückt, in Abhängigkeit von der Hammermasse m

Parameter — außer m — wie in (80)

$$m/m_a = \bar{m}$$

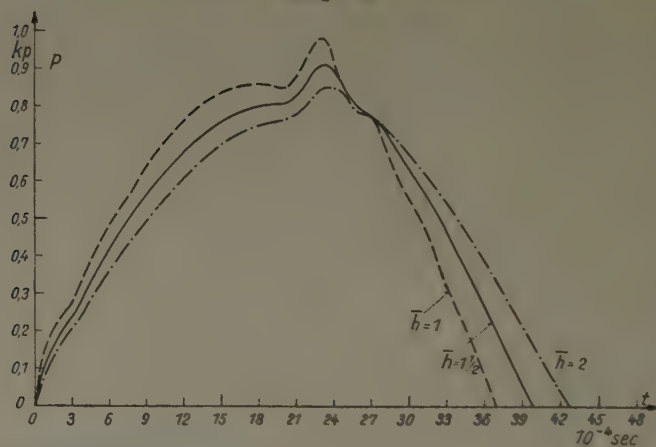


Bild 6. Zeitlicher Verlauf der Kraft P , mit der der Hammer auf die Saite drückt, in Abhängigkeit von der Hammernachgiebigkeit h

Parameter — außer h — wie in (80)

$$h/h_a = \bar{h}$$

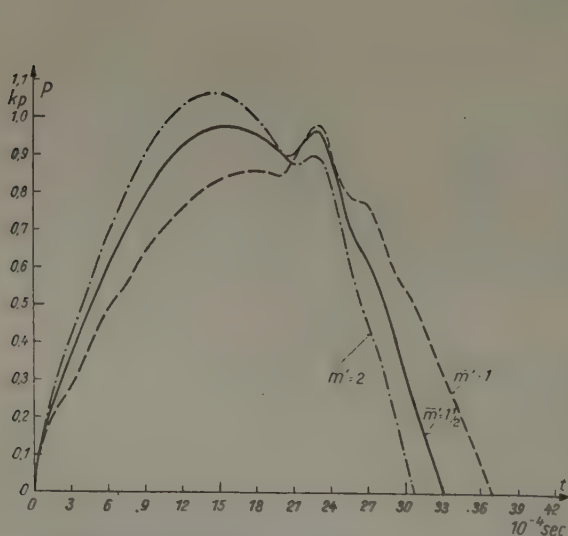


Bild 7. Zeitlicher Verlauf der Kraft P , mit der der Hammer auf die Saite drückt, in Abhängigkeit von der Saitenmasse m'

Parameter — außer m' — wie in (80)

$$m'/m'_a = \bar{m}'$$

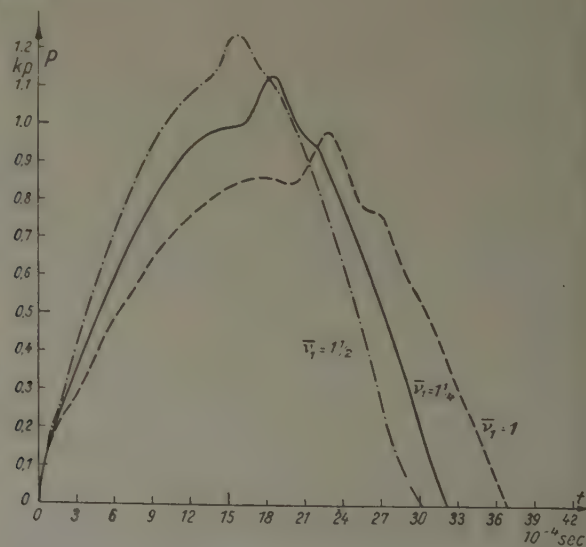


Bild 8. Zeitlicher Verlauf der Kraft P , mit der der Hammer auf die Saite drückt, in Abhängigkeit von der Saitengrundfrequenz v_1

Parameter — außer v_1 — wie in (80)

$$v_1/v_{1a} = \bar{v}_1$$

Vergrößerung der Hammermasse m bewirkt nach Bild 5 zwar eine Vergrößerung des $P(t)$ im ganzen Verlauf, aber bei Beginn des Anschlagvorganges nur sehr allmählich. Die Berührungsdauer t_B wächst mit m . Daß der Impuls $\int_0^{t_B} P(t) dt$ der Hammermasse m streng proportional sei, kann man aus der aus (6) folgenden Beziehung

$$\int_0^{t_B} P(t) dt = m [v_0 - \dot{u}(t_B)]$$

nicht ohne weiteres schließen; denn $\dot{u}(t_B)$ könnte von m abhängen. Die Kurven von Bild 5 zeigen nun, daß eine solche Abhängigkeit im betrachteten Parameterbereich nur sehr gering sein kann⁴²⁾.

Nach Bild 6 ist der Einfluß der Hammer-Nachgiebigkeit h auf $P(t)$ wesentlich schwächer als der der übrigen Parameter. Das ist erfreulich, weil die Hammer-Nachgiebigkeit nur wenig scharf definierbar ist. Mit zunehmendem h wird im angegebenen Bereich die Druckkraft-Kurve flacher und die Berührungsdauer größer⁴³⁾.

Welche Rolle die Saitenmasse spielt, erkennt man aus Bild 7. Vergrößerung der Saitenmasse wirkt auf $P(t)$ etwa wie eine Verschiebung der Anschlagstelle zum näheren Saitenende hin⁴⁴⁾. Verdoppelung der Saitenmasse kann wegen $m' = \rho l$ erreicht werden, indem man entweder die Länge, die Dichte oder den Querschnitt der Saite verdoppelt.

Stimmt man bei konstant bleibender Saitenmasse den Grundton der Saite höher, indem man die Saitenspannung erhöht oder die Saitenlänge verkürzt⁴⁵⁾, so wird nach Bild 8 das $P(t)$ -Maximum größer und t_B kleiner.

Bild 9 und 10 zeigen, wie die a_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, 5$) und damit die Intensitäten des Grundtones und der ihm beigemischten ersten vier Obertöne von den angegebenen Parametern abhängen.

Wie zu erwarten, verschwindet in Bild 9 die Amplitude einer Partialschwingung dann, wenn die Anschlagstelle mit einem Knotenpunkt der betreffenden Partialschwingung zusammenfällt. So ist z. B. das Tongemisch bei einem Anschlag in der Saitenmitte ($s = 1/2$) recht „dünn“; es fehlen die geraden Partialschwingungen, also die ungeraden Obertöne ganz. Aber auch der Anschlag bei $s = 1/4$ ist dem Klavierbauer nicht erwünscht; denn bei den Parameterwerten (80) — s ausgenommen — übertrifft die Amplitude der ersten Oberschwingung die der Grundschwingung beträchtlich. Das von einem Anschlag bei $s = 1/8$ und sonst unveränderten Parametern herrührende Tonspektrum hingegen zeigt Vorteile: Der Grundton ist relativ stark ausgeprägt, der (in der Oktave zum Grundton stehende) erste Oberton tritt stark zurück, aber der (in der Quinte zum ersten Oberton stehende) zweite und der (in der Quarte zum zweiten Oberton stehende) dritte Oberton bereichern das Tonspektrum merklich. Hält man in Bild 9 ein Lineal parallel zur a_λ -Achse ($\lambda = 1, 2, \dots, 5$), so kann man durch Verschiebung desselben in Richtung der s -Achse Tonspektren innerhalb gewisser Grenzen auswählen.

Wie Bild 10 zeigt, üben auch die übrigen Parameter erheblichen Einfluß auf die Klangfarbe aus. Durch Änderung der Hammermasse z. B. kann man den ersten Oberton stärker oder schwächer machen. Erhöhung der Hammer-Nachgiebigkeit verstärkt den ersten Oberton. Vergrößert man die Saitenmasse (z. B. durch Verlängerung der Saite), so ändert sich das Tongemisch, wie ein Vergleich mit Bild 9 ergibt, zunächst ähnlich wie bei einer Verlegung der Anschlagstelle nach dem näheren Saitenende zu. Erhöhung der Grundfrequenz ν_1 bei gleicher

⁴²⁾ Setzt man $I = \int_0^{t_B} P(t) dt$ und $\bar{m} = \frac{m}{m_a}$, so ergibt numerische Integration unter Benutzung der ⁽³⁾ P_n -Werte, falls die Parameter außer m die Werte (80) haben, die Impulse der folgenden Tabelle.

\bar{m}	1	1,25	1,50
$I(\bar{m})$	22,08	27,45	33,29
10^{-4} kp sec			

Da $\frac{27,45}{22,08} = 1,243$ und $\frac{33,29}{22,08} = 1,507$ ist, hängt $I(\bar{m})$ offenbar nicht streng linear von \bar{m} ab.

⁴³⁾ Wegen der Bedeutung des Parameters h für das Stetigkeitsverhalten des $P(t)$ und seiner Ableitungen vgl. man den Absatz nach Gleichung (65).

⁴⁴⁾ Man vgl. Bild 1.

⁴⁵⁾ Aus (31) folgt $\nu_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{m' l}}$.

Saitenmasse m' führt zu einer Verkleinerung der Grundschwingungsamplitude, also zu einer Schwächung des Grundtones.

Kombiniert man die Parameter-Änderungen, die den Kurven auf den Bildern 9 und 10 zugrunde liegen, so vergrößern sich die Möglichkeiten, vorgegebene Tonspektren zu erzeugen.

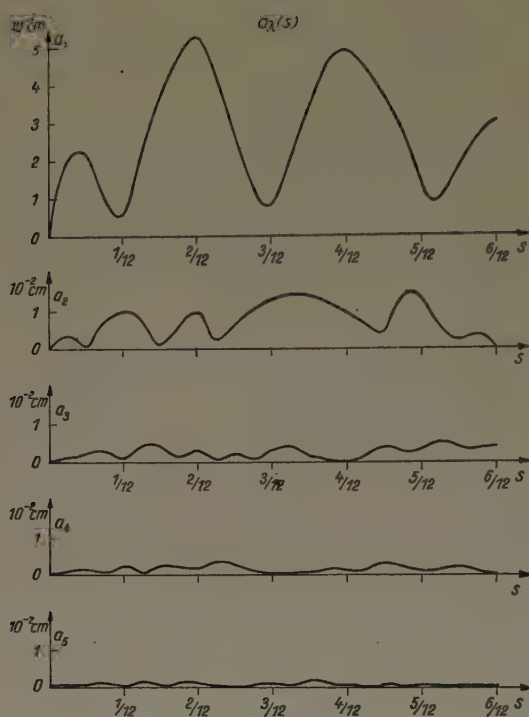


Bild 9. Amplituden a_λ der Saiten-Partialschwingungen in Abhängigkeit von der relativen Anschlagstelle s
Werte der übrigen Parameter wie in (80)

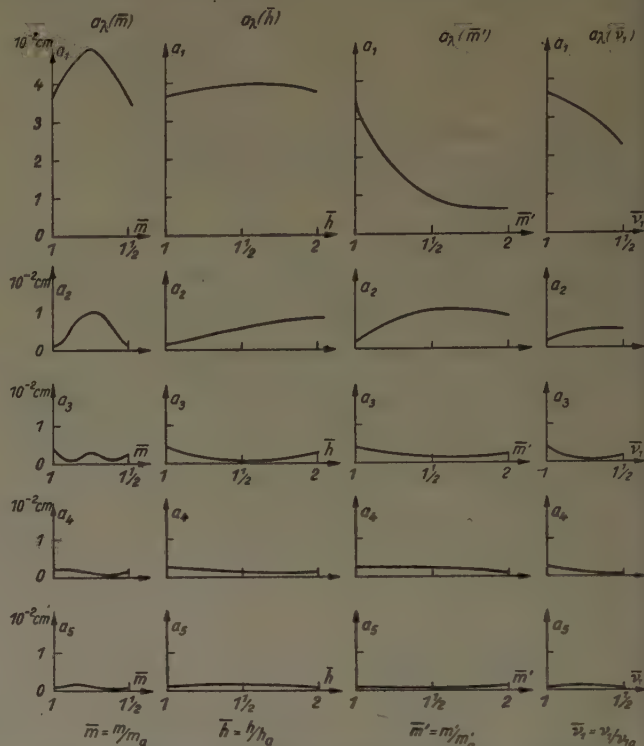


Bild 10. Amplituden a_λ der Saiten-Partialschwingungen in Abhängigkeit von der Hammermasse m , der Hammer-Nachgiebigkeit h , der Saitenmasse m' , der Saitengrundfrequenz ν_1

Werte der jeweils nicht hervorgehobenen Parameter wie in (80)

9. Anhang

A) Verfahrensfehler; Rechenkontrolle

Um etwas über den effektiven Fehler zu erfahren, der sich nach einer Anzahl Schritten des Näherungsverfahrens eventuell summieren könnte, berechnen wir zum Vergleiche die strenge Lösung der Druckkraft $P(t)$ während der ersten Grundschwingungsdauer für die Anschlagstelle $s = 1/2$. Die Parameterwerte — mit Ausnahme von s — entnehmen wir (80).

Da das Gültigkeitsintervall von (63) im Falle $s = 1/2$ auf Null zusammenschrumpft, entnehmen wir (54) für $s = 1/2$ die (56) entsprechende Darstellung⁴⁶⁾

$$P(t) = \frac{v_0}{2\pi i h} \cdot \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{e^{tx}}{q(x)} dx + \frac{v_0}{2\pi i h^2 \sqrt{\varrho} S} \cdot \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{x}{q^2(x)} \cdot e^{(t-\frac{w}{2})x} dx \quad \left(\frac{w}{2} < t < w\right) \quad (81).$$

Zur Lösung der Integrale in (81) kann (61) unverändert übernommen werden; der Darstellung (64) ist bei Übertragung auf das Gültigkeitsintervall von (81) der Faktor 2 beizufügen.

Wir formen zunächst den in (62) und (64) auftretenden Term $\sqrt{\varrho} S$ um, indem wir ihn mit Hilfe der Parameter (79) darstellen. Es ist nach (30) $\nu_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{S}{\varrho}}$. Erweitert man mit ϱ , so erhält man $\nu_1 = \frac{1}{2m'} \sqrt{\varrho S}$ und daher

$$\sqrt{\varrho S} = 2 m' \nu_1 \quad \dots \dots \dots (82).$$

⁴⁶⁾ Man beachte ¹⁸⁾.

schen Saitenbefestigung an dem der Anschlagstelle fernerer Saitenende in Richtung der erzwungenen Saitenauslenkung⁴⁸⁾. Die Dimension des k_l ist Kraft/Länge.

Gleichgewichtsbetrachtung an den Saitenenden⁴⁹⁾ ergibt die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta &= 0 & \xi &= 0 \\ \eta &= -\frac{1}{\kappa_1} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) & \text{für} & \xi = 1 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (85),$$

wobei zur Abkürzung

$$\kappa_1 = \frac{l}{S} k_l \quad \dots \dots \dots (86)$$

gesetzt ist⁵⁰⁾.

Geht man bei einem Ansatz für die Saitenauslenkung von

$$\eta(\xi, t) = \sum g_\lambda(t) \cdot \sin(v_\lambda \xi) \quad \left(\lambda = 1, 2, \dots, N; \quad N \ll \frac{\kappa_1}{\pi} \right) \quad \dots \dots \dots (87)$$

aus, so führen die Randbedingungen (85) zu der Gleichung

$$\sum g_\lambda(t) \cdot \left\{ \sin v_\lambda + \frac{1}{\kappa_1} v_\lambda \cos v_\lambda \right\} = 0 \quad \left(\lambda = 1, 2, \dots, N; \quad N \ll \frac{\kappa_1}{\pi} \right).$$

Da die g_λ als linear unabhängig vorauszusetzen sind, verschwindet jeder einzelne g_λ -Koeffizient, d. h. der Inhalt der geschweiften Klammer. Es besteht mithin für die v_λ die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{tg} v_\lambda = -\frac{1}{\kappa_1} \cdot v_\lambda \quad \left(v_\lambda > 0; \quad \lambda = 1, 2, \dots, N; \quad N \ll \frac{\kappa_1}{\pi} \right) \quad \dots \dots \dots (88).$$

Mit $\kappa_1 \rightarrow \infty$ (starre Saitenbefestigung) geht v_λ , wie es sein muß, gegen $\lambda \pi$. Für $\kappa_1 \gg 1$ ergibt sich aus (88)

$$v_\lambda = \lambda \pi \left(1 - \frac{1}{\kappa_1} \right) + o \left(\frac{1}{\kappa_1^2} \right) \quad (1 < v_\lambda \ll \kappa_1) \quad \dots \dots \dots (89).$$

Setzt man $\xi = \frac{x}{l}$, so kann man wegen

$$\lambda \pi \left(1 - \frac{1}{\kappa_1} \right) \xi = \lambda \pi \left(1 - \frac{1}{\kappa_1} \right) \frac{x}{l} = \frac{\lambda \pi x}{l(1 + 1/\kappa_1)} + o \left(\frac{1}{\kappa_1^2} \right)$$

$\sin(v_\lambda \xi)$ aus (87) durch

$$\sin(v_\lambda \xi) = \sin \frac{\lambda \pi x}{l} + o \left(\frac{1}{\kappa_1^2} \right) \quad (1 < v_\lambda \ll \kappa_1) \quad \dots \dots \dots (90)$$

mit

$$\bar{l} = l \left(1 + \frac{1}{\kappa_1} \right) = l + \frac{S}{k_l} \quad (\kappa_1 \gg 1) \quad \dots \dots \dots (91)$$

ersetzen.

Speziell für die Anschlagstelle $\xi = s$ gilt nach (89)

$$\sin(v_\lambda s) = \sin(\lambda \pi \bar{s}) + o \left(\frac{1}{\kappa_1^2} \right) \quad (1 < v_\lambda \ll \kappa_1) \quad \dots \dots \dots (92)$$

mit

$$\bar{s} = s \cdot \left(1 - \frac{1}{\kappa_1} \right) \quad \left(\kappa_1 \gg 1, \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \right) \quad \dots \dots \dots (93).$$

Wie es sein muß, ist

$$\bar{s} \cdot \bar{l} = s \left(1 - \frac{1}{\kappa_1} \right) \cdot l \left(1 + \frac{1}{\kappa_1} \right) = s \cdot l + o \left(\frac{1}{\kappa_1^2} \right),$$

d. h. die (absolute) Anschlagstelle ist unabhängig von der Art der Saitenbefestigung.

⁴⁸⁾ Im Vergleich dazu ist die Nachgiebigkeit der Saitenbefestigung an dem der Anschlagstelle näheren Ende ebenso wie diejenige an beiden Enden in der Saitenlängsrichtung bei einem normalen Klavier zu vernachlässigen. Man vgl. H. ANSCHÜTZ, [11].

⁴⁹⁾ In [10], Abschn. 2, werden die Randbedingungen in verallgemeinerter Form hergeleitet.

⁵⁰⁾ Der Parameter κ_1 wird in [10], Gleichung (15), eingeführt.

Die Ergebnisse der numerischen Rechnung befinden sich in den Wertetafeln 4 und 5. Die tabellarisch angegebenen Funktionen $\bar{P}\left(\frac{1}{\kappa_1}; t\right)$ und $\bar{a}_\lambda\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)$ sind für $\kappa_1 \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich den gesuchten, $P\left(\frac{1}{\kappa_1}; t\right)$ und $a_\lambda\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)$.

Wertetafel 4

t 10 ⁻⁴ sec	$\bar{P}\left(\frac{1}{\kappa_1}; t\right)$			
	$\frac{1}{\kappa_1} = 0$ kp	$\frac{1}{\kappa_1} = 0,01$ kp	$\frac{1}{\kappa_1} = 0,02$ kp	
6	0,481	0,486	0,491	Parameter wie in (80), $P\left(\frac{1}{\kappa_1}; t\right) \cong \bar{P}\left(\frac{1}{\kappa_1}; t\right)$ für $\kappa_1 \rightarrow \infty$.
12	0,757	0,765	0,774	
18	0,854	0,860	0,866	
24	0,906	0,907	0,908	
30	0,541	0,534	0,526	
36	0,075	0,059	0,041	

Wertetafel 5

λ	$\bar{a}_\lambda\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)$			
	$\frac{1}{\kappa_1} = 0$ 10 ⁻² cm	$\frac{1}{\kappa_1} = 0,01$ 10 ⁻² cm	$\frac{1}{\kappa_1} = 0,02$ 10 ⁻² cm	
1	3,65	3,56	3,49	Parameter wie in (80), $a_\lambda\left(\frac{1}{\kappa_1}\right) \cong \bar{a}_\lambda\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)$ für $\kappa_1 \rightarrow \infty$.
2	0,115	0,197	0,291	
3	0,424	0,449	0,493	
4	0,254	0,237	0,225	

Da nach H. ANSCHÜTZ, [11], im Klavierbau die Härteziffer $\kappa_1 = 100$ kaum unterschritten wird, ja selbst $\kappa_1 = 500$ eine noch recht nachgiebige Saitenlagerung bezeichnet, erkennt man, daß die gebräuchliche Nachgiebigkeit der Saitenlagerung nur unwesentlichen Einfluß auf $P(t)$ und a_λ hat.

Literatur

[1] ST. TIMOSHENKO, Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken, Zschr. f. Math. u. Phys. 1913, S. 198—209.
[2] C. V. RAMAN und B. BANERJI, On Kaufmann's theory of the impact of the pianoforte hammer, Proceedings Royal Society London, 97 A (1920).
[3] P. DAS, On the vibrations of the pianoforte-string, Proc. Ind. Assoc. Science, Vol. VII, parts I and II (1921).
[4] P. DAS, On the pressure exerted by an elastic hammer impinging on a pianoforte string, Proc. Ind. Assoc. Science, Vol. IX, part IV (1926), S. 297—322.
[5] P. DAS, On the impact of an elastic hammer on a pianoforte-string, Ind. Journal of Physics (1927).
[6] R. N. GHOSH, Acoustics of the pianoforte, Ind. Journal of Physics, Vol. II (1927).
[7] M. GHOSH, Experimental study of the duration of contact of an elastic hammer striking a damped piano-forte string, Ind. Journal of Physics, Vol. VII (1932).
[8] W. LANGE, Zur Physik des Konzertflügels I und II, Zschr. Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 45 (1935).
[9] K. KARAS, Eigenschwingungen von Saiten mit elastisch befestigten Enden, Federhofer-Girkmann-Festschrift 1950, S. 37—56.
[10] K. KARAS, Eigenschwingungen von Saiten mit elastisch befestigten Enden, Österr. Ing.-Archiv IX. Heft 4 (1955), S. 352—388.
[11] H. ANSCHÜTZ, Der Anschlag der Klaviersaiten bei nachgiebig befestigten Enden (experimentelle Diplom-Arbeit), Inst. f. angew. Mech. der Techn. Hochschule Darmstadt.
[12] K. KARAS und H. AHBE, Analytische Untersuchung des Saitenanschlages, Zschr. angew. Math. Mech. 35 (1955), S. 406—427.

Bending of a Rectangular Plate with Two Opposite Free Edges and Other Two Simply Supported Edges Having Any Clamped Portion

By M. KURATA and H. OKAMURA*)

Es wird die Biegung einer rechteckigen Platte untersucht, bei der zwei gegenüberliegende Kanten frei sind, während ein beliebiger Teil der beiden anderen aufliegenden Kanten eingespannt ist. Numerische Resultate werden angegeben für den Fall einer quadratischen Platte, die sich unter der Einwirkung einer gleichförmigen Last bzw. einer punktförmig konzentrierten Last befindet.

The present study deals with the bending of a rectangular plate with two opposite free edges and other two simply supported edges having any clamped portion, and presents some numerical results of a square plate under a uniform load or a point load.

В настоящей работе рассматривается изгибание прямоугольной пластинки, два противоположных края которой свободны, а два других поддерживаемых края в некотором участке закреплены. Даются некоторые численные результаты для квадратной пластинки, подвергаемой равномерной или точечной нагрузке.

The mixed boundary value problems about the rectangular plates have been investigated by many authors. However, it is felt that there are not at present enough theoretical data concerning the plate with the partially clamped edge, because, in most cases, the greater labour is required for the numerical work.

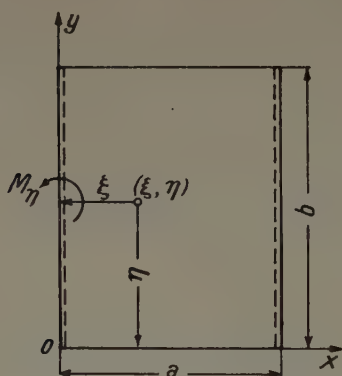


Fig. 1

The purpose of this investigation is to find the feature of distortion of such a plate and the chief difficulty in the theoretical work is to satisfy the condition of fixity only in any portion of the edge of the plate. In this paper, the solution is constructed by means of finding the resisting moments introduced along the clamped portions of edge to cancel the slope of the deflection surface produced by a given load only in such portions. The results by theory have been compared with the experimental data and the satisfactory agreement was found.

1. Deflection surface of a rectangular plate produced by a single moment acted upon an edge

Referring to Fig. 1, if we denote by \bar{w} the deflection of a plate with two opposite simply supported edges ($x = 0$ and $x = a$) and other two free edges ($y = 0$ and $y = b$) under a unit load at a point (ξ, η) , the deflection w_M of this plate produced by a single moment M_η at a point $(0, \eta)$ upon an edge $x = 0$ can be obtained by the following operation:

$$w_M = M_\eta \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} \dots \dots \dots (1)^1.$$

The deflection function \bar{w} is governed by the differential equation

$$D \Delta \bar{w} = P(x, y) \dots \dots \dots (2)$$

subject to the following boundary conditions:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \bar{w} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ and } x = a, \\ (b) \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{for } y = 0 \text{ and } y = b, \\ (c) \quad \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{for } y = 0 \text{ and } y = b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3),$$

*) Department of Civil Eng., Faculty of Eng., Osaka City University.

¹⁾ A. NADAI „Elastische Platten“ 1925 s. 162.

where, $P(x, y)$ = load function

$$= \begin{cases} 0 & \text{when } x \neq \xi, y \neq \eta, \\ 1 & \text{when } x = \xi, y = \eta, \end{cases}$$

D = flexural rigidity of a plate,
 ν = Poisson's ratio.

We can write the solution of the above differential equation, which satisfies conditions (a), in the following form:

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \quad (4),$$

in which \bar{w}_1 and \bar{w}_2 are a particular integral for the single load and the complementary solution (so-called LEVY's solution) and they are respectively represented in series:

$$\bar{w}_1 = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (5),$$

$$\bar{w}_2 = \sum_m (A_m \cosh \alpha_m y + B_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + C_m \sinh \alpha_m y + D_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \quad (6),$$

where

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

and

$$a_{mn} = \frac{4}{D a b (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}.$$

Since, A_m , B_m , C_m and D_m are the constants to be determined in a way to satisfy the remaining boundary conditions (b), (c) assigned in (3), further calculation gives

$$\left. \begin{aligned} A_m &= -\frac{2 B_m}{1 - \nu}, \\ B_m &= \sum_n \left\{ \frac{(-1)^n \operatorname{cosech} \alpha_m b - \coth \alpha_m b \{3 + \nu - (-1)^n (1 - \nu) \alpha_m b \operatorname{cosech} \alpha_m b\} a_{mn}}{(3 + \nu)^2 - \{(1 - \nu) \alpha_m b \operatorname{cosech} \alpha_m b\}^2} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\beta_n}{\alpha_m} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) \right\}, \\ C_m &= \frac{1}{1 - \nu} \left\{ (1 + \nu) D_m - \sum_n \frac{\beta_n}{\alpha_m} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) a_{mn} \right\}, \\ D_m &= \sum_n \frac{\{3 + \nu - (-1)^n (1 - \nu) \alpha_m b \operatorname{cosech} \alpha_m b\} a_{mn}}{(3 + \nu)^2 - \{(1 - \nu) \alpha_m b \operatorname{cosech} \alpha_m b\}^2} \cdot \frac{\beta_n}{\alpha_m} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) \end{aligned} \right\} \quad (7).$$

Substituting these into (6) and settling (4) by (5) and (6), the deflection \bar{w} can be written in the following form:

$$\bar{w} = \sum_m \sum_n \bar{f}_{mn}(y) \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta \sin \alpha_m x \quad (8),$$

(1, 2, 3, ...) (1, 2, 3, ...)

where,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{mn}(y) &= B_m \left(\alpha_m y \sinh \alpha_m y - \frac{2}{1 - \nu} \cosh \alpha_m y \right) + D_m \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \sinh \alpha_m y + \alpha_m y \cosh \alpha_m y \right) \\ &\quad - \frac{a_{mn}}{1 - \nu} \frac{\beta_n}{\alpha_m} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) \sinh \alpha_m y + a_{mn} \sin \beta_n y \quad (9). \end{aligned}$$

Then we can get the deflection w_M produced by a single moment M_η on an edge $x = 0$ by substituting the expression (8) into (1), and we get the result

$$w_M = \frac{M_\eta}{D a b} \sum_m \sum_n \bar{f}_{mn}(y) \sin \beta_n \eta \sin \alpha_m x \quad (10),$$

(1, 2, 3, ...) (1, 2, 3, ...)

in which

$$\begin{aligned} \bar{f}_{mn}(y) &= A_{mn} \left[\sin \beta_n y + \frac{\beta_n}{\alpha_m} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) \left\{ G_{mn} \left(\alpha_m y \sinh \alpha_m y - \frac{2}{1 - \nu} \cosh \alpha_m y \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + H_{mn} \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \sinh \alpha_m y + \alpha_m y \cosh \alpha_m y \right) - \frac{1}{1 - \nu} \sinh \alpha_m y \right\} \right] \quad (11), \end{aligned}$$

where

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}, \\ G_{mn} &= \frac{\{(-1)^n \operatorname{cosech} \alpha_m b - \coth \alpha_m b\} \{3 + \nu - (-1)^n (1 - \nu) \alpha_m b \operatorname{cosech} \alpha_m b\}}{(3 + \nu)^2 - \{(1 - \nu) \alpha_m b \operatorname{cosech} \alpha_m b\}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

and

$$H_{mn} = \frac{3 + \nu - (-1)^n (1 - \nu) \alpha_m b \operatorname{cosech} \alpha_m b}{(3 + \nu)^2 - \{(1 - \nu) \alpha_m b \operatorname{cosech} \alpha_m b\}^2}$$

2. Condition of partial clamping

Using the expression (10), we obtain the slope of a plate along its edge ($x = 0$) as follows:

$$\Theta_{x=0} = \left. \frac{\partial w_M}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M_\eta}{D a b} \sum_m \sum_n \alpha_m f_{mn}(y) \sin \beta_n \eta \quad \dots \quad (13).$$

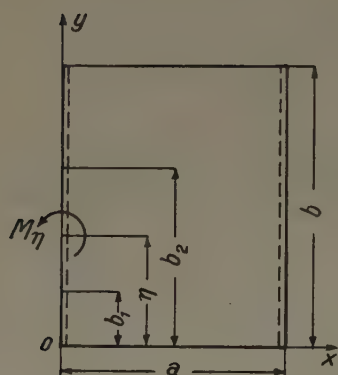


Fig. 2

Let us assume now that the moment M_η is a distributed one in the interval $b_1 < \eta < b_2$ along the edge $x = 0$ as is shown in Fig. 2. In this case, the slope along the edge $x = 0$ is obtained by making use of (13), namely,

$$\Theta_{x=0} = \frac{1}{D a b} \sum_m \sum_n \alpha_m f_{mn}(y) \int_{b_1}^{b_2} M_\eta \sin \beta_n \eta d\eta \quad \dots \quad (14).$$

If we can adjust the slope produced by the distributing moment in a way to cancel the slope which is caused by the given load in the above portion, we can regard such a portion as the clamped one. Therefore, it follows that the distributing moment M_η represents the resisting moment of this case. Consequently, if we assume the distributed portion of the moment, we can introduce the solution of the bending of the plate with simply supported edge containing such clamped portion.

Now, we assume that M_η can be expressed in the trigonometric series with the unknown constants E_s , that is

$$M_\eta = \sum_s E_s \sin \frac{s \pi (\eta - b_1)}{h} \quad \dots \quad (15),$$

where h is the distributing length of the moment M_η , namely,

$$h = b_2 - b_1.$$

Substituting (15) into (14), we obtain

$$\Theta_{x=0} = \frac{1}{D a b} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\alpha_m \gamma_s E_s}{\beta_n^2 \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} f_{mn}(y) \quad \dots \quad (16),$$

where

$$\gamma_s = \frac{s \pi}{h}.$$

On the other hand, the slope of the same rectangular plate along the edge $x = 0$ under a given load is expressed generally by

$$\Theta'_{x=0} = \frac{1}{D} \sum_m \sum_n g_{mn}(y) \quad \dots \quad (17),$$

where, $g_{mn}(y)$, being a function according to a given load, can be reduced to the same form as $f_{mn}(y)$, which is expressed in (11), for the same rectangular plate, but, in this case, instead of the expression A_{mn} , the following expression A'_{mn} must be adopted according to the given load:

$$\left. \begin{aligned} A'_{mn} &= \frac{16 q_0 \alpha_m}{\pi^2 (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 m n} && \text{for the plate under the uniform load of intensity } q_0 \text{ distributed over the entire surface of it,} \\ \text{or} &&& \\ A'_{mn} &= \frac{4 P_0 \alpha_m \sin \alpha_m \xi' \sin \beta_n \eta'}{a b (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} && \text{for the plate under the concentrated load } P_0 \text{ at the point } (\xi', \eta') \end{aligned} \right\} \quad (18).$$

The preceding discussions lead us to the conclusion that the present problem can be reduced to the problem of finding unknown constants E_s so as to satisfy the condition of the partial clamping in the interval $b_1 < y < b_2$ as is given by the equation

$$\Theta_{x=0} + \Theta'_{x=0} = 0 \quad (b_1 < y < b_2) \quad \dots \dots \dots (19).$$

3. Equations for determining unknown constants

The equations (16) and (17) in the previous article are applicable for $0 < y < b$. However, for the purpose of satisfying the equation (19), it is necessary to transform them in FOURIER series for $b_1 < y < b_2$.

We can now express as follows the functions $f_{mn}(y)$ and $g_{mn}(y)$ in sine series for $b_1 < y < b_2$:

$$\text{and} \quad \left. \begin{aligned} f_{mn}(y) &= \sum_{\substack{k \\ (1, 2, 3, \dots)}} C_k \sin \frac{k \pi (y - b_1)}{h}, \\ g_{mn}(y) &= \sum_{\substack{k \\ (1, 2, 3, \dots)}} C'_k \sin \frac{k \pi (y - b_1)}{h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20),$$

where C_k and C'_k mean the FOURIER coefficients.

In this way, from (16) and (17) we get

$$\Theta_{x=0} = \frac{1}{D a b} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\alpha_m \gamma_s E_s}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} f_{mn}^*(y) \quad \dots \quad (21),$$

$$\Theta'_{x=0} = \frac{1}{D} \sum_m \sum_n g_{mn}^*(y) \quad \dots \dots \dots (22),$$

in which $f_{mn}^*(y)$ means one which is obtained from $f_{mn}(y)$ in (16) by applying the series expansion of (20), i. e.

$$\begin{aligned} f_{mn}^*(y) &= \sum_k \frac{2 \delta_k}{h} \sin \delta_k (y - b_1) \left[\frac{1}{\beta_n^2 - \delta_k^2} \{(-1)^k \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_n \varphi_{kmn}}{\alpha_m (\alpha_m^2 + \delta_k^2)} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) A_{mn} \right] \quad \dots \quad (23), \end{aligned}$$

where

$$\delta_k = \frac{k \pi}{h}$$

and

$$\begin{aligned} \varphi_{kmn} &= \left[\alpha_m \{(-1)^k b_2 \sinh \alpha_m b_2 - b_1 \sinh \alpha_m b_1\} - 2 \left(\frac{\alpha_m^2}{\alpha_m^2 + \delta_k^2} + \frac{1}{1 - \nu} \right) \{(-1)^k \cosh \alpha_m b_2 - \cosh \alpha_m b_1\} \right] G_{mn} \\ &\quad + \left[\alpha_m \{(-1)^k b_2 \cosh \alpha_m b_2 - b_1 \cosh \alpha_m b_1\} - \left(\frac{2 \alpha_m^2}{\alpha_m^2 + \delta_k^2} - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \{(-1)^k \sinh \alpha_m b_2 - \sinh \alpha_m b_1\} \right] H_{mn} \\ &\quad - \frac{1}{1 - \nu} \{(-1)^k \sinh \alpha_m b_2 - \sinh \alpha_m b_1\} \quad \dots \quad (24). \end{aligned}$$

The function $g_{mn}^*(y)$ can be written in the form similar to the expression (23) provided that A'_{mn} , prescribed in (18), is used instead of A_{mn} . Finally, the equation to determine unknowns E_s is obtained by (19) in the following way:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a b} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\alpha_m \gamma_s E_s}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} \left[\frac{1}{\beta_n^2 - \delta_k^2} \{(-1)^k \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_n}{\alpha_m (\alpha_m^2 + \delta_k^2)} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) \varphi_{kmn} \right] A_{mn} \\ &= - \sum_m \sum_n \left[\frac{1}{\beta_n^2 - \delta_k^2} \{(-1)^k \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} - \frac{\beta_n}{\alpha_m (\alpha_m^2 + \delta_k^2)} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) \varphi_{kmn} \right] A'_{mn} \\ &\quad (b_1 < y < b_2) \quad \dots \dots \dots (25). \end{aligned}$$

This expression represents infinite sets of linear equations corresponding to each value of k and s . The unknown constants E_s must be obtained by solving such simultaneous equations, which form the necessary condition for making the slope along the edge $x = 0$ become zero only in the interval $b_1 < y < b_2$. Once the constants E_s are determined, the resisting moment is to be found from the equation (15).

4. Deflection and bending moment

From the expressions (10) and (15), the deflection w_M due to the resisting moment M_η which is determined in the portion $b_1 < y < b_2$ is represented in the form

$$\begin{aligned} w_M &= \frac{1}{D a b} \sum_m \sum_n f_{mn}(y) \sin \alpha_m x \int_{b_1}^{b_2} M_\eta \sin \beta_n \eta d\eta \\ &= \frac{1}{D a b} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\gamma_s E_s}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} f_{mn}(y) \sin \alpha_m x \quad \dots (26). \end{aligned}$$

By superposing this w_M on the deflection w_L under a given load, the present deflection surface w is obtained in the form

$$w = w_L + w_M.$$

Since the bending moments M_x'' and M_y'' produced by M_η are expressed by the second derivative of (26), we can get

$$\begin{aligned} M_x'' &= -D \left(\frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{a b} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\alpha_m^2 \gamma_s E_s}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} \{f_{mn}(y) - \nu f_{mn}''(y)\} \sin \alpha_m x \quad (27), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y'' &= -D \left(\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{1}{a b} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\alpha_m^2 \gamma_s E_s}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} \{\nu f_{mn}(y) - f_{mn}''(y)\} \sin \alpha_m x \quad (28), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} f_{mn}''(y) &= \frac{\beta_n}{\alpha_m} \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} + 2 - \nu \right) \left[G_{mn} \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{1 - \nu} \right) \cosh \alpha_m y + \alpha_m y \sinh \alpha_m y \right\} \right. \\ &\quad \left. + H_{mn} \left\{ \left(2 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \sinh \alpha_m y + \alpha_m y \cosh \alpha_m y \right\} - \frac{1}{1 - \nu} \sinh \alpha_m y \right] A_{mn} - A_{mn} \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} \sin \beta_n y \quad (29). \end{aligned}$$

Now, using the expression (15), we can calculate the resisting moment in the interval $b_1 < y < b_2$ on the edge $x = 0$.

On the other hand, using (27) and employing the limiting process, we can obtain the same moment as follows:

$$\begin{aligned} M_x'' &= \frac{1}{a b} \sum_s \sum_n \frac{\gamma_s E_s}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} \lim_{x \rightarrow 0} \sum_m \alpha_m^3 f_{mn}(y) \sin \alpha_m x \\ &= \frac{2}{b} \sum_s \sum_n \frac{\gamma_s E_s}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} \sin \beta_n y \quad \dots \dots \dots (30), \end{aligned}$$

but the expression (15) is more advantageous than (30) in respect of convergency.

The bending moment M can be obtained by the same way that we determine the deflection surface, then

$$M = M' + M'',$$

in which M' represents the bending moment produced by the given load.

Hitherto, we have prescribed the formulas for general case, however the more convenient transformation or simplification will be explained for the calculation of these formulas in accordance with each example. We will proceed with the discussion which corresponds to some particular cases.

5. Example: Symmetrical bending of a square plate

As is shown in Fig. 3, the problem to be treated here is that of the bending of a square plate with two opposite simply supported edges $x = 0$ and $x = a$ having the symmetrically clamped portions along $a/3$ length, under the uniform load of intensity q distributed over the entire surface of the plate or a point load P at the center of the surface.

Here, let us take $a = b$, $h = a/3$, $b_1 = a/3$, $b_2 = 2a/3$ and $\nu = 0.3$.

Observing that the boundary and load conditions are symmetrical with respect to the coordinate system and referring to the equation (1), we have to adopt the following equation:

$$w_M = M_\eta \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} - M_\eta \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right|_{\xi=a},$$

hence

$$\begin{aligned} w_M &= \frac{M_\eta}{D a b} \sum_{m=1,2,3,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} (1 - \cos m \pi) f_{mn}(y) \sin \beta_n \eta \sin \alpha_m x \\ &= \frac{2 M_\eta}{D a b} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} f_{mn}(y) \sin \beta_n \eta \sin \alpha_m x \quad \dots (31). \end{aligned}$$

Comparing this with the expression (10), we can say that m and n become odd integers and $2 M_\eta$ is used in place of M_η , and such comparison can be applied to all the formulas in the previous articles. It follows from this that all the formulas in the previous discussion should be used after performance of the above rewriting for the present example.

Now the resisting moments distributed along the clamped parts ought to become symmetrical, therefore, the expression (15) is the odd series, namely $s = 1, 3, 5, \dots$, and, as for the expression (20), we can also take as $k = 1, 3, 5, \dots$ from the rule of symmetry.

(1) Equations to determine unknown constants E_s

Let us start with setting

$$a = b, \quad h/a = b_1/a = 1/3, \quad a - 2b_1 = h \quad \text{and} \quad b_1 = (a - h)/2,$$

and we find the factor in (25), (26) and (30) is written as

$$\frac{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} = \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{2 \sin \frac{n \pi b_1}{a}}{s^2 - n^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2} \quad \dots (32).$$

For the case of Fig. 3 the equations determining E_s become

$$\sum_{s=1,3,5,\dots} s E_s \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{m^2 \sin \frac{n \pi}{3}}{(m^2 + n^2)^2 \left(s^2 - \frac{n^2}{9} \right)} \left\{ \frac{2 \sin \frac{n \pi}{3}}{k^2 - \frac{n^2}{9}} + \frac{n}{m \left(k^2 + \frac{m^2}{9} \right)} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) S_{km} \right\} = L_k \quad (33).$$

The right member L_k is decided in accordance with the load conditions, such as: a) for the plate under a uniform load of intensity q distributing over the entire surface,

$$L_k = -\frac{3 q a^2}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2 n} \left\{ \frac{2 \sin \frac{n \pi}{3}}{k^2 - \frac{n^2}{9}} + \frac{n}{m \left(k^2 + \frac{m^2}{9} \right)} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) S_{km} \right\},$$

b) for the plate under a point load P at the center of the surface,

$$L_k = -\frac{3 P}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{m \sin \frac{m \pi}{2} \sin \frac{n \pi}{2}}{(m^2 + n^2)^2} \left\{ \frac{2 \sin \frac{n \pi}{3}}{k^2 - \frac{n^2}{9}} + \frac{n}{m \left(k^2 + \frac{m^2}{9} \right)} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) S_{km} \right\} \quad (34),$$

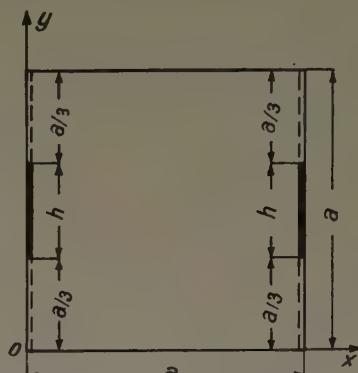


Fig. 3

Remarks:
: Simply supported edge
 ———: Clamped edge
 ———: Free edge

where, S_{km} is represented by

$$S_{km} = \left[m\pi \left(\frac{2}{3} \sinh \frac{2m\pi}{3} + \frac{1}{3} \sinh \frac{m\pi}{3} \right) - 2 \left(\frac{1}{9} \frac{m^2}{k^2 + \frac{m^2}{9}} + \frac{1}{0.7} \right) \left(\cosh \frac{2m\pi}{3} + \cosh \frac{m\pi}{3} \right) \right] G_m \\ + \left[m\pi \left(\frac{2}{3} \cosh \frac{2m\pi}{3} + \frac{1}{3} \cosh \frac{m\pi}{3} \right) - \left(\frac{2}{9} \frac{m^2}{k^2 + \frac{m^2}{9}} - \frac{1.3}{0.7} \right) \left(\sinh \frac{2m\pi}{3} + \sinh \frac{m\pi}{3} \right) \right] H_m \\ - \frac{1}{0.7} \left(\sinh \frac{2m\pi}{3} + \sinh \frac{m\pi}{3} \right), \quad (k, m = 1, 3, 5, \dots) \quad (35)$$

with

$$G_m = - \frac{(\operatorname{cosech} m\pi + \coth m\pi)(3.3 + 0.7 m\pi \operatorname{cosech} m\pi)}{10.89 - (0.7 m\pi \operatorname{cosech} m\pi)^2}, \\ \text{and} \quad H_m = \frac{3.3 + 0.7 m\pi \operatorname{cosech} m\pi}{10.89 - (0.7 m\pi \operatorname{cosech} m\pi)^2} \quad (36).$$

In the next step, we attempt to introduce another form of these equations (33) and (34) which will be more suitable for numerical calculations. Now, some part of the double series in these equations can be rewritten in the form of the single series for m or n , namely, we have from (33)

$$\sum_{s(1,3,5\dots)} s E_s \left[\sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{s^2 - \frac{n^2}{9}} \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{k^2 - \frac{n^2}{9}} \left(\frac{1}{n} \tanh \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{n\pi}{2} \right) + \sum_m \frac{mn}{(m^2 + n^2)^2 \left(k^2 + \frac{m^2}{9} \right)} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) S_{km} \right\} \right] = L_k \quad (37),$$

where, from (34)

$$L_k = - \frac{3qa^2}{4\pi} \left\{ \sum_{n(1,3,5\dots)} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n^3 \left(k^2 - \frac{n^2}{9} \right)} \left(\frac{1}{n} \tanh \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{n\pi}{2} \right) \right. \\ \left. + \sum_{m(1,3,5\dots)} \frac{S_{km}}{2m^3 \left(k^2 + \frac{m^2}{9} \right)} \left(\frac{2.7}{m} \tanh \frac{m\pi}{2} - \frac{0.7\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{m\pi}{2} \right) \right\} \\ \text{for the case (a), and} \\ L_k = - \frac{3pP}{16} \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{n(1,3,5\dots)} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n \left(k^2 - \frac{n^2}{9} \right)} \tanh \frac{n\pi}{2} \operatorname{sech} \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right. \\ \left. + \sum_{m(1,3,5\dots)} \frac{S_{km}}{m \left(k^2 + \frac{m^2}{9} \right)} \left(\frac{1}{m} + \frac{0.7\pi}{4} \tanh \frac{m\pi}{2} \right) \operatorname{sech} \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} \right\} \quad (38)$$

for the case (b).

These transformations were carried out with the aid of following summation formulas:

$$\sum_{\substack{m \\ (1, 3, 5 \dots)}} \frac{m^2}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{n} \tanh \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{n\pi}{2} \right) \dots \dots \dots (39.a),$$

$$\sum_{\substack{m \\ (1, 3, 5 \dots)}} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{\pi}{8m^2} \left(\frac{1}{m} \tanh \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{m\pi}{2} \right) \dots \dots \dots (39.b),$$

$$\sum_{\substack{m \\ (1, 3, 5 \dots)}} \frac{m \sin m\pi\xi}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{\pi^2}{8n} \operatorname{sech}^2 \frac{n\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sinh \frac{n\pi}{2} \cosh n\pi \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \sinh n\pi \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \cosh \frac{n\pi}{2} \right] \dots \dots \dots (39.c),$$

and

$$\sum_{\substack{m \\ (1, 3, 5 \dots)}} \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{\pi^2}{16n} \tanh \frac{n\pi}{2} \operatorname{sech} \frac{n\pi}{2} \dots \dots \dots (39.c').$$

Further, we can rewrite the expression (35) in a more convenient form to retain the significant figures when m is large. This is

$$S_{km} = \frac{m\pi}{3} \left\{ \epsilon_m - 2G_m \left(e^{-\frac{m\pi}{3}} + \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{m\pi}{3}} + \epsilon_m \left(e^{\frac{m\pi}{3}} + \frac{1}{2} \right) e^{\frac{m\pi}{3}} \right\} \\ + \left\{ \frac{1}{0.7} \epsilon'_m + \frac{1}{2} \left(\frac{1.3}{0.7} - \frac{2}{9} \frac{m^2}{k^2 + \frac{m^2}{9}} \right) \epsilon_m \right\} \left(e^{\frac{m\pi}{3}} + 1 \right) e^{\frac{m\pi}{3}} \\ + \left\{ \frac{1}{0.7} \epsilon''_m - \frac{2}{9} \frac{m^2 G_m}{k^2 + \frac{m^2}{9}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{9} \frac{m^2}{k^2 + \frac{m^2}{9}} - \frac{1.3}{0.7} \right) \epsilon_m \right\} \left(e^{-\frac{m\pi}{3}} + 1 \right) e^{-\frac{m\pi}{3}} \dots (40),$$

in which

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_m &= H_m + G_m = - \frac{(e^{-m\pi} + 1)(3.3 + 0.7 m\pi \operatorname{cosech} m\pi) \operatorname{cosech} m\pi}{10.89 - (0.7 m\pi \operatorname{cosech} m\pi)^2}, \\ \epsilon'_m &= - \frac{1}{2} (3.3 G_m + 1) \\ &= \frac{\operatorname{cosech} m\pi \{ 5.445 (1 + e^{-m\pi}) + 1.155 m\pi \coth m\pi + 0.35 m\pi (3.3 + 0.7 m\pi) \operatorname{cosech} m\pi \}}{10.89 - (0.7 m\pi \operatorname{cosech} m\pi)^2}, \\ \epsilon''_m &= \frac{1}{2} (1 - 0.7 G_m) \end{aligned} \right\} (41).$$

and

Returning to the expression (32), let us investigate some points that need attention concerning numerical calculations.

Now, we have the relation

$$\sin \frac{n\pi b_1}{a} = \sin \frac{n\pi}{2a} (a - h) = \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi h}{2a} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi h}{2a} \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

and by setting $\frac{h}{a} = \delta$, we obtain

$$\frac{\sin \frac{n\pi b_1}{a}}{s^2 - n^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi}{2} \delta}{n^2 \frac{s^2}{n^2} - \delta^2}.$$

Especially, in case of $\delta = \frac{s}{n}$, we must calculate this value by the following process:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow \frac{s}{n}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi}{2} \delta}{n^2 \left(\frac{s^2}{n^2} - \delta^2 \right)} &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \lim_{\delta \rightarrow \frac{s}{n}} \frac{-\frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \delta}{-2n^2 \delta} \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi \sin \frac{s\pi}{2}}{4n \left(\frac{s}{n} \right)} = -\frac{(-1)^{\frac{n+s}{2}} \pi}{4s} \quad (s, n, = 1, 3, 5, \dots) . \end{aligned}$$

Since $\frac{h}{a} = \frac{s}{n}$ in this case, it becomes

$$s + n = s \left(1 + \frac{a}{h} \right) = s(1 + 3) = 4s ,$$

and

$$(-1)^{\frac{n+s}{2}} = (-1)^{2s} = 1 .$$

If

$$\frac{s}{n} = \frac{h}{a} = \frac{1}{3} , \quad \frac{\sin \frac{n\pi b_1}{a}}{s^2 - n^2 \frac{h^2}{a^2}} = -\frac{\pi}{4s} \dots \dots \dots (42) .$$

Finally we have

$$\frac{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} = \frac{2a^2}{9\pi^2} \left(-\frac{\pi}{4s} \right) = -\frac{a^2}{18s\pi} \dots \dots \dots (43) .$$

With the same process, we can introduce the same relation with regard to the factor in the equation (25):

$$\frac{(-1)^k \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1}{\beta_n^2 - \delta_k^2} \quad (k, n = 1, 3, 5, \dots) .$$

In view of the above discussions, we can obtain the equation determining unknown E_s for the aforesaid plate under the uniform load q or a point load P by using the equations (37), (38), (40) and (41).

Equation (37) is a system of linear equations for E_s , holding for each value of k and s , but limiting ourselves now to the first twelve constants, we can obtain the approximate values of E_s as are shown in Table 1 for $k, s = 1, 3, 5, \dots 23$.

Table 1. Numerical factors α and α' for $E_s = \alpha q a^2$ and $E'_s = \alpha' P$

s	α	α'
1	-0.2037	-0.3366
3	-0.1264	-0.1777
5	-0.1018	-0.1393
7	-0.0739	-0.1001
9	-0.0849	-0.1143
11	-0.0813	-0.1092
13	-0.0816	-0.1092
15	-0.0869	-0.1163
17	-0.0768	-0.1026
19	-0.0774	-0.1034
21	-0.0757	-0.1012
23	-0.0759	-0.1010

Remarks:

E_s : for the plate under the uniform load of intensity q distributed over the entire surface of it.

E'_s : for the plate under the concentrated load P at the center of the surface.

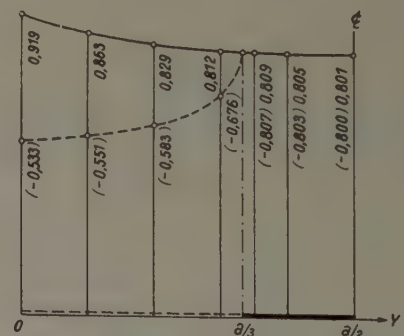


Fig. 4. Distribution of the slope along the edge $x = 0$

Remark: Numerical values in the figure must be multiplied by $16 q a^2 / D \pi^2$

Now, it may be of interest to observe the accuracy of our solution obtained by foregoing constants E_s . Returning to the boundary condition expressed by the equation (19), i. e.,

$$\Theta_{x=0} + \Theta'_{x=0} = 0 \quad (b_1 < y < b_2),$$

in which $\Theta'_{x=0}$ is calculated by (17) and $\Theta_{x=0}$ is obtained by substituting E_s in Table 1 into (16), and evaluating (19) with these values of Θ , we can find that the process which we have derived is good enough for practical use of this problem as is understood by Fig. 4.

Here, Fig. 4 shows the distributions of the slope $\Theta_{x=0}$, in the parentheses, and $\Theta'_{x=0}$ along the edge $x = 0$ and it can be observed that the slope disappears practically only in the portion which is clamped.

(2) Deflection

The accuracy of the equations (26), (27) and (28) in the previous article is commanded by that of E_s (E'_s) and, in our problem, we have obtained the numerical results of the deflection and the bending moment retaining the value of three significant figures.

a) Deflection of the plate under the uniform load q

In this case, the expression (26) becomes

$$w_M = \frac{16 a^2}{3 D \pi^4} \sum_{s \substack{(1, 3, 5 \dots)}} s E_s \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n \pi}{3}}{n^2 (m^2 + n^2)^2} \left\{ \sin \frac{n \pi}{a} y + \frac{n}{m} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U_m(y) \right\} \sin \frac{m \pi}{a} x \quad (44),$$

where

$$U_m(y) = \left(\frac{m \pi}{a} y \sinh \frac{m \pi}{a} y - \frac{2}{0.7} \cosh \frac{m \pi}{a} y \right) G_m + \left(\frac{1.3}{0.7} \sinh \frac{m \pi}{a} y + \frac{m \pi}{a} y \cosh \frac{m \pi}{a} y \right) H_m - \frac{1}{0.7} \sinh \frac{m \pi}{a} y \quad (45).$$

Rewriting some parts of the double series in this expression into single series by the use of (39.c) and expressing (45) by exponential function, the expression of w_M takes more convenient form for evaluation:

$$w_M = \frac{16 a^2}{3 D \pi^4} \sum_{s \substack{(1, 3, 5 \dots)}} s E_s \sum_n \frac{\sin \frac{n \pi}{3}}{n^2} \left[\frac{\pi^2}{8 n} \operatorname{sech}^2 \frac{n \pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sinh \frac{n \pi}{2} \cosh n \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \sinh n \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \cosh \frac{n \pi}{2} \right\} \sin \frac{n \pi}{a} y + \sum_m \frac{n}{(m^2 + n^2)^2} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U_m(y) \sin \frac{m \pi}{a} x \right] \quad (46),$$

where

$$U_m(y) = \left\{ \frac{1}{0.7} \varepsilon'_m + \left(\frac{1.3}{0.7} + \frac{m \pi}{a} y \right) \frac{\varepsilon_m}{2} \right\} e^{\frac{m \pi}{a} y} + \left\{ \frac{1}{0.7} \varepsilon''_m - G_m \frac{m \pi}{a} y + \left(\frac{m \pi}{a} y - \frac{1.3}{0.7} \right) \frac{\varepsilon_m}{2} \right\} e^{-\frac{m \pi}{a} y} \quad (47),$$

in which ε_m , ε'_m , ε''_m and G_m are already given in (41) and (36) respectively.

On the other hand, the deflection w_L produced only by the given load is computed by

$$w_L = \frac{16 q a^4}{D \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m \pi}{a} x}{(m^2 + n^2) m n} \left\{ \sin \frac{n \pi}{a} y + \frac{n}{m} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U_m(y) \right\} \quad (48).$$

Furthermore, this can be written more conveniently by using formulas (39.a) and (39.b) and we obtain

$$w_L = \frac{16 q a^4}{D \pi^6} \sum_m \left\{ \sum_n \frac{\sin \frac{n \pi}{a} y}{(m^2 + n^2) m n} + \frac{\pi}{8 m^4} \left(\frac{2.7}{m} \tanh \frac{m \pi}{2} - \frac{0.7 \pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{m \pi}{2} \right) U_m(y) \right\} \times \sin \frac{m \pi}{a} x \quad (49).$$

With the expressions (46) and (49), we thus find the deflection surface w by superposition:

$$w = w_L + w_M.$$

The maximum deflection w_{max} arises at the center of free edges and Table 2 indicates how the ratio w/w_{max} moves for each point of the plate and Fig. 5 also shows the deflection surface by the method of the contour lines.

Table 2. Values of w/w_{max}

$y/a \backslash x/a$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0	0.304	0.581	0.804	0.949	1.000
0.1	0	0.259	0.501	0.702	0.836	0.883
0.2	0	0.209	0.424	0.613	0.742	0.788
0.3	0	0.149	0.350	0.537	0.666	0.712
0.4	0	0.101	0.295	0.484	0.615	0.662
0.5	0	0.088	0.275	0.464	0.597	0.644

Here, we obtain the saddle surface having the feature of partial clamping.

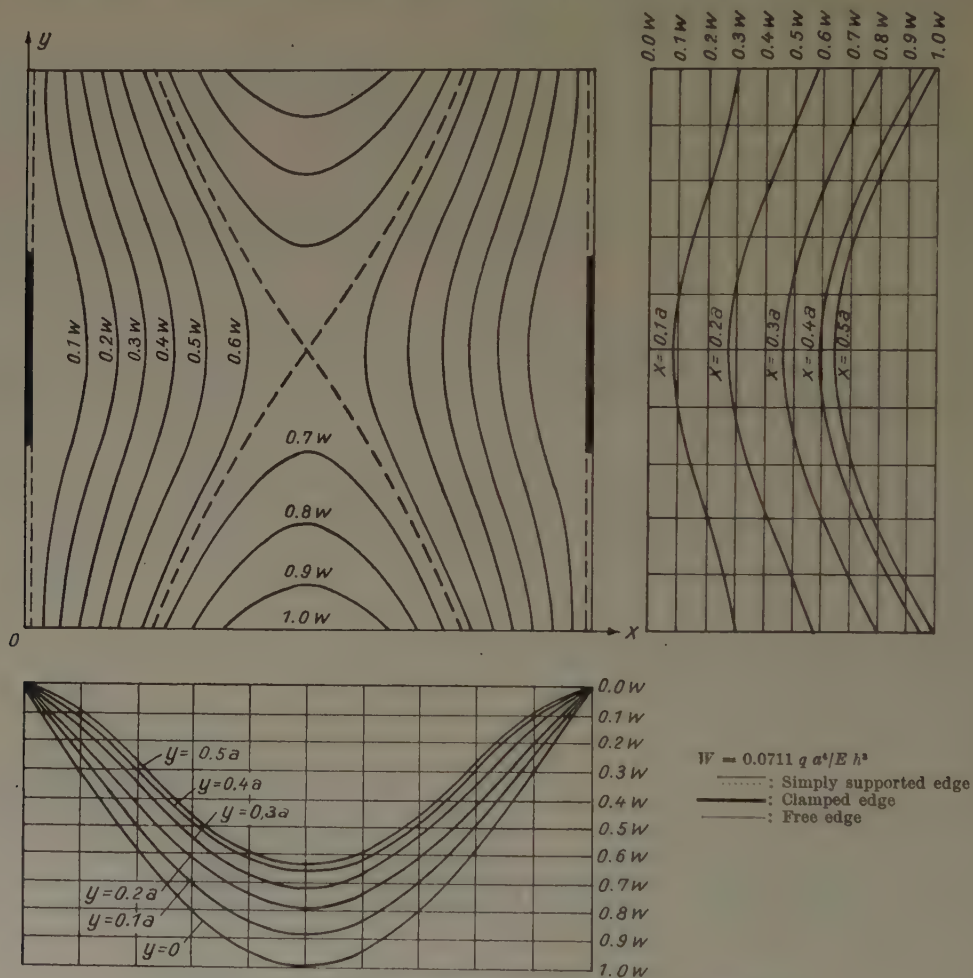


Fig. 5. Contour lines of the deflection surface of the plate under the uniform load q

b) Deflection of a plate under a point load P

Expression w_M of this case is similar to (44), except replacing the constants E_s by E'_s shown in Table 1.

Further, w_L now becomes

$$w_L = \frac{4 P a^2}{D \pi^4} \sum_{m \substack{(1, 3, 5, \dots)}} \sum_{n \substack{(1, 3, 5, \dots)}} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{(m^2 + n^2)^2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{a} y + \frac{n}{m} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U_m(y) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (50),$$

where $U_m(y)$ is given by (47).

By the use of formulas (39.c') and

$$\sum_{\substack{n \\ (1, 3, 5, \dots)}} \frac{n}{m^2 + n^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \operatorname{sech} \frac{m\pi}{2} \dots \dots \dots (51),$$

we can rewrite (50) in the form:

$$w_L = \frac{4 P a^2}{D \pi^4} \sum_{\substack{m \\ (1, 3, 5, \dots)}} \left\{ \sum_{\substack{n \\ (1, 3, 5, \dots)}} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{n\pi}{a} y + \frac{\pi}{4 m^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{0.7\pi}{4} \tanh \frac{m\pi}{2} \right) \operatorname{sech} \frac{m\pi}{2} U_m(y) \right\} \\ \times \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{a} x \dots \dots \dots (52).$$

Finally, we have the deflection w as

$$w = w_L + w_M.$$

The maximum deflection arises at the center of the surface and we have Table 3 and Fig. 6.

Table 3. Values of w/w_{max}

$y/a \backslash x/a$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0	0.183	0.362	0.519	0.628	0.668
0.1	0	0.179	0.361	0.528	0.649	0.693
0.2	0	0.169	0.360	0.551	0.693	0.746
0.3	0	0.141	0.357	0.584	0.762	0.830
0.4	0	0.118	0.354	0.629	0.850	0.943
0.5	0	0.109	0.353	0.635	0.879	1.000

Fig. 6 shows the cask-like deflection surface having the feature of partial clamping.

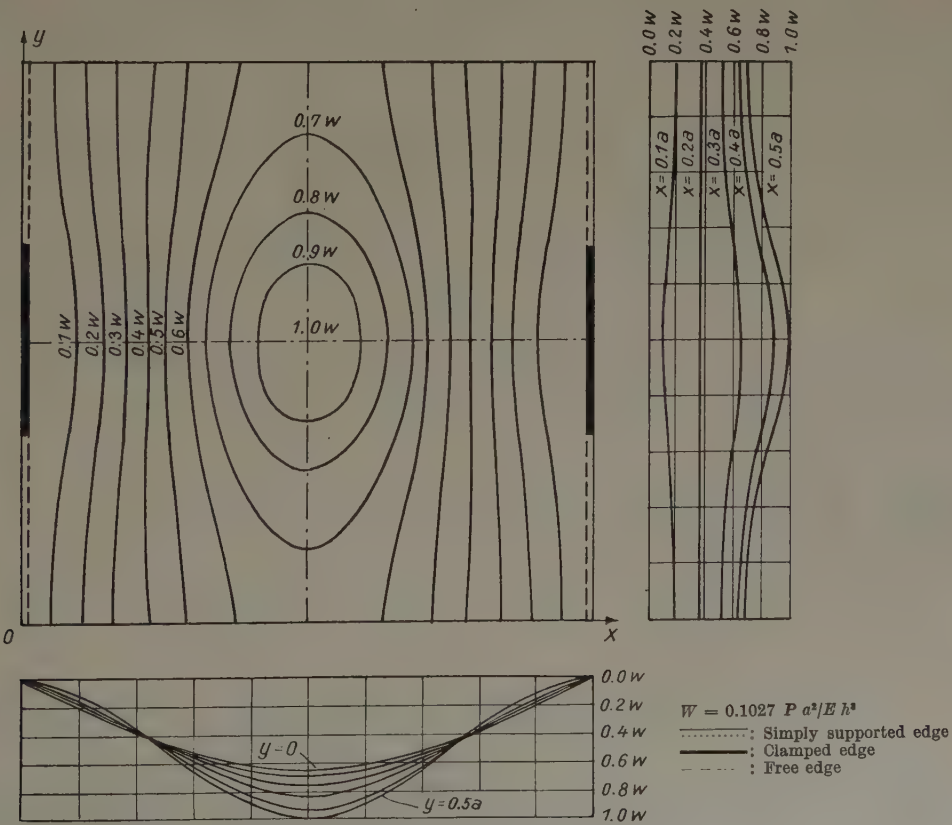


Fig. 6. Contour lines of the deflection surface of the plate under a central point load P

3) Bending moment

a) Bending moment of the plate under the uniform load q

In order to find the bending moment produced by the resisting moment M_η , we start with obtaining as follows:

$$\frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} = -\frac{16}{3 D \pi^2} \sum_s E_s \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{s^2 - \frac{n^2}{9}} \frac{m^3}{(m^2 + n^2)^2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{a} y + \frac{n}{m} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U_m(y) \right\} \times \sin \frac{m\pi}{a} x \quad \dots (53),$$

$$\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} = -\frac{16}{3 D \pi^2} \sum_s E_s \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{s^2 - \frac{n^2}{9}} \frac{m}{(m^2 + n^2)^2} \left\{ n^2 \sin \frac{n\pi}{a} y - m n \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U'_m(y) \right\} \times \sin \frac{m\pi}{a} x \quad \dots (54),$$

where $U_m(y)$ is given by (45) and $U'_m(y)$ is obtained by

$$U'_m(y) = \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y - \frac{0.6}{0.7} \cosh \frac{m\pi}{a} y \right) G_m + \left(\frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y + \frac{2.7}{0.7} \sinh \frac{m\pi}{a} y \right) H_m - \frac{1}{0.7} \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \quad \dots (55).$$

Further, with the aid of summation formulas (39, c) and (51), we can rewrite the expressions (53) and (54) in the following form:

$$\frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} = -\frac{16}{3 D \pi^2} \sum_s E_s \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{s^2 - \frac{n^2}{9}} \times \left\{ \psi_n \left(\frac{x}{a} \right) \sin \frac{n\pi}{a} y + \sum_m \frac{m^2 n}{(m^2 + n^2)^2} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \quad \dots (56),$$

$$\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} = -\frac{16}{3 D \pi^2} \sum_s E_s \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{s^2 - \frac{n^2}{9}} \times \left\{ \psi'_n \left(\frac{x}{a} \right) \sin \frac{n\pi}{a} y - \sum_m \frac{m^2 n}{(m^2 + n^2)^2} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U'_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \quad \dots (57),$$

where

$$\psi_n \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{\pi}{4} \cosh n\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \operatorname{sech} \frac{n\pi}{2} - \psi'_n \left(\frac{x}{a} \right) \quad \dots (58),$$

and

$$\psi'_n \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{n\pi^2}{8} \operatorname{sech}^2 \frac{n\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sinh \frac{n\pi}{2} \cosh n\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \sinh n\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \cosh \frac{n\pi}{2} \right\} \quad (59).$$

Now, $U'_m(y)$ takes more convenient form represented by the exponential function:

$$U'_m(y) = \left\{ \left(\frac{2.7}{0.7} + \frac{m\pi}{a} y \right) \varepsilon_m - \frac{1}{0.7} (3.3 G_m + 1) \right\} \frac{e^{\frac{m\pi}{a} y}}{2} + \left\{ \frac{1}{0.7} (2.1 G_m + 1) - 2 G_m \frac{m\pi}{a} y + \left(\frac{m\pi}{a} y - \frac{2.7}{0.7} \right) \varepsilon_m \right\} \frac{e^{-\frac{m\pi}{a} y}}{2} \quad \dots (60),$$

or $U_m(y)$ again be rewritten in another form:

$$U_m(y) = U_m(y) + \varepsilon_m e^{\frac{m\pi}{a} y} + (2 G_m - \varepsilon_m) e^{-\frac{m\pi}{a} y} \quad \dots (61).$$

With these values, we can get the bending moments M_x'' and M_y'' caused by the distributed moment M_η in the form:

$$\left. \begin{aligned} M_x'' &= -D \left(\frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} + 0.3 \frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} \right), \\ M_y'' &= -D \left(\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} + 0.3 \frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (62).$$

To obtain the bending moments caused by the given load, we introduce

$$\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} = -\frac{16 q a^2}{D \pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m \sin \frac{m \pi}{a} x}{(m^2 + n^2)^2 n} \left\{ \sin \frac{n \pi}{a} y + \frac{n}{m} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U_m(y) \right\} \quad (63),$$

and

$$\frac{\partial^2 w_L}{\partial y^2} = -\frac{16 q a^2}{D \pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m \pi}{a} x}{(m^2 + n^2)^2 m} \left\{ n \sin \frac{n \pi}{a} y - m \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) U'_m(y) \right\} \quad (64).$$

These expressions can be rewritten more conveniently by using the formulas (39,a) and (39,b), i. e.,

$$\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} = -\frac{16 q a^2}{D \pi^4} \left\{ \sum_n \frac{1}{n^4} \psi'_n \left(\frac{x}{a} \right) \sin \frac{n \pi}{a} y + \sum_m \frac{\pi}{8 m^2} \left(\frac{2.7}{m} \tanh \frac{m \pi}{2} - \frac{0.7 \pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{m \pi}{2} \right) \right. \\ \left. \times U_m(y) \sin \frac{m \pi}{a} x \right\} \quad (65),$$

and

$$\frac{\partial^2 w_L}{\partial y^2} = -\frac{16 q a^2}{D \pi^4} \left\{ \sum_m \frac{1}{m^4} \psi'_m \left(\frac{y}{a} \right) \sin \frac{m \pi}{a} x - \sum_n \frac{\pi}{8 m^2} \left(\frac{2.7}{m} \tanh \frac{m \pi}{2} - \frac{0.7 \pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{m \pi}{2} \right) \right. \\ \left. \times U'_m(y) \sin \frac{m \pi}{a} x \right\} \quad (66).$$

Here, the expression $\psi'_m \left(\frac{y}{a} \right)$ is derived by the replacement of n and x with m and y respectively from $\psi'_n \left(\frac{x}{a} \right)$ represented in (59). Using (65) and (66), we can get the bending moments M_x' and M_y' under a given load in the same way as is shown in (62). Finally we can calculate the bending moments of the present plate by the superposition of

$$M_x = M_x' + M_x'' \quad \text{and} \quad M_y = M_y' + M_y''.$$

In the next step, in order to find the clamping moment M_η , we go back to the expression (15) with putting $b_2 = \frac{2}{3} a$ and $b_1 = \frac{a}{3}$ and we obtain

$$M_\eta = \sum_s E_s \sin \frac{s \pi (3 \eta - a)}{a} \dots \dots \dots (67).$$

For instance, the clamping moment at $\left(x = 0 \text{ and } \eta = \frac{a}{2} \right)$ becomes

$$M_x = \left(M_{\eta = \frac{a}{2}} \right) = \sum_s E_s \sin \frac{s \pi}{2} = E_1 - E_3 + E_5 - E_7 + \dots - E_{23} \dots \dots (68).$$

Using the expression (30) by means of limiting process, we can also get another expression in series for the same clamping moment but, in this case, we find slower convergence, compared with the above expressions. This value shows the convergence gets gradually worse with approaching

nearer the position where the boundary condition changes from clamping to simple supporting, therefore, we must compute this value with the aid of so-called EULER's transformation²⁾ which improves convergency of alternate series. Especially, the stress concentration occurs at the particular points $\eta = \frac{a}{3}$ and $\eta = \frac{2a}{3}$ where the boundary condition changes, and the series (67) diverge. Therefore we can not get the numerical value of the moment at these points.

The bending moment diagram for the plate under the uniform load q is given in Fig. 7.

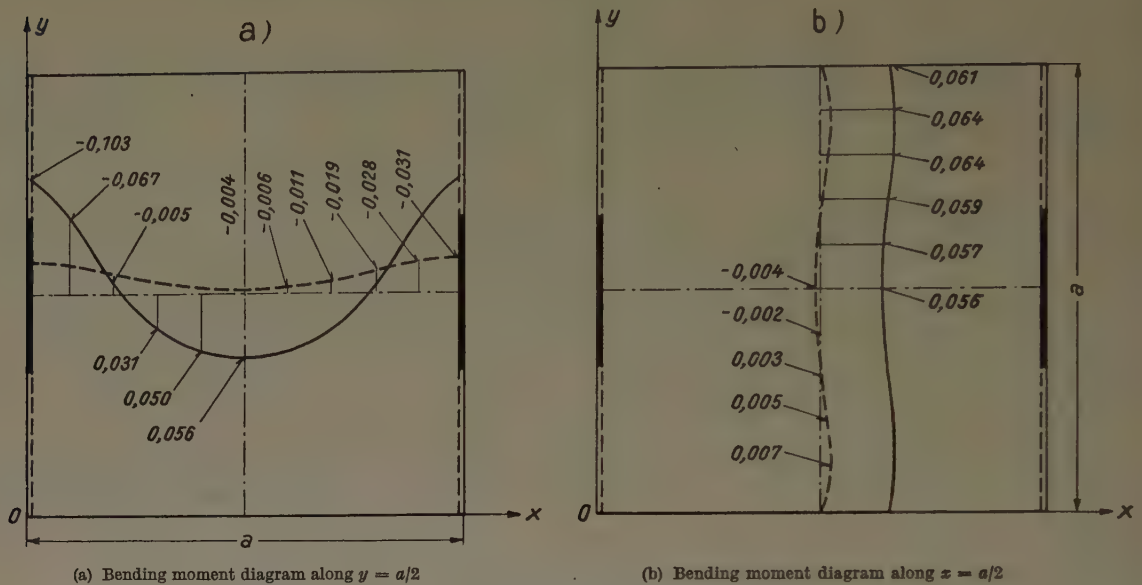


Fig. 7. Bending moment diagrams for the plate under the uniform load q

Remarks: ———: M_x ,: M_y .

Numerical values in the graphs must be multiplied by qa^2

(b) Bending moment of the plate under a point load P

In this case, using the expressions obtained in the foregoing section (a) and replacing E_s by E'_s , we can get

$$\frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} = -\frac{16}{3D\pi^2} \sum_{(1,3,5,\dots)} s E'_s \sum_{(1,3,5,\dots)} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n^2 - \frac{9}{s^2}} \left\{ \psi_n \left(\frac{x}{a} \right) \sin \frac{n\pi}{a} y + \sum_{(1,3,5,\dots)} \frac{m^2 n}{(m^2 + n^2)^2} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) \right. \\ \left. \times U_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \quad (69),$$

and

$$\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} = -\frac{16}{3D\pi^2} \sum_{(1,3,5,\dots)} s E'_s \sum_{(1,3,5,\dots)} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n^2 - \frac{9}{s^2}} \left\{ \psi'_n \left(\frac{x}{a} \right) \sin \frac{n\pi}{a} y - \sum_{(1,3,5,\dots)} \frac{m^2 n}{(m^2 + n^2)^2} \left(\frac{n^2}{m^2} + 1.7 \right) \right. \\ \left. \times U'_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \quad (70),$$

where $\psi \left(\frac{x}{a} \right)$, $\psi' \left(\frac{x}{a} \right)$, $U_m(y)$ and $U'_m(y)$ are as defined before in (58), (59), (47) and (61) respectively.

Substituting (69) and (70) into (62), we have the bending moments M''_x and M''_y corresponding to each direction x and y produced by the resisting moment. Further, to obtain the bending

²⁾ K. KNOPP, "Theory and Application of Infinite Series", London and Glasgow 1954, p. 244.

moments under a given load, we introduce

$$\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} = -\frac{4P}{D\pi^2} \sum_m \left\{ \sum_n \frac{m^2}{(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{a} y + \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{m} + \frac{0.7\pi}{4} \tanh \frac{m\pi}{2} \right) \operatorname{sech} \frac{m\pi}{2} U_m(y) \right\} \times \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{a} x \dots (71),$$

and

$$\frac{\partial^2 w_L}{\partial y^2} = -\frac{4P}{D\pi^2} \sum_m \left\{ \sum_n \frac{n^2}{(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{a} y - \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{m} + \frac{0.7\pi}{4} \tanh \frac{m\pi}{2} \right) \operatorname{sech} \frac{m\pi}{4} U'_m(y) \right\} \times \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{a} x \dots (72).$$

With these values, we can get the bending moments M'_x and M'_y under a given load in the same way as is shown by (62) and finally we have the bending moments M_x and M_y by superposition

$$M_x = M'_x + M''_x \quad \text{and} \quad M_y = M'_y + M''_y.$$

Now, using (67) and replacing E_s by E'_s , we have the magnitude of the clamping moment. For instance, the clamping moment at $(x = 0 \text{ and } \eta = \frac{a}{2})$ is given by

$$M_x = \left(M_{\eta = \frac{a}{2}} \right) = \sum_s E'_s \sin \frac{s\pi}{2} = E'_1 - E'_3 + E'_5 - E'_7 + \dots - E'_{23} \dots (73).$$

Fig. 8 shows the bending moment diagram for this case.

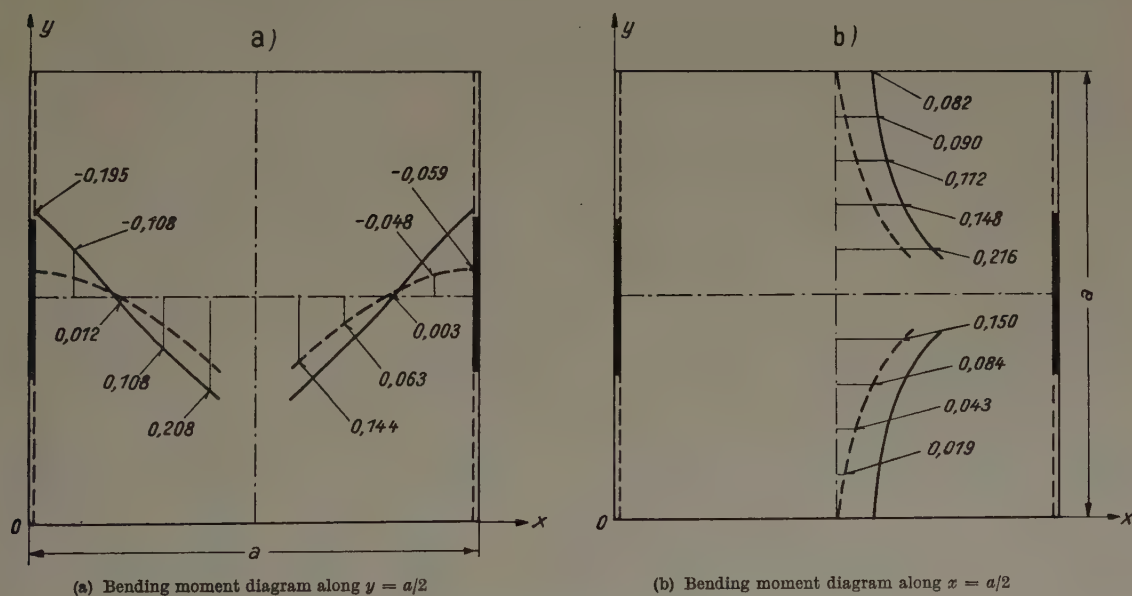


Fig. 8. Bending moment diagrams for the plate under a point load P

Remarks: ———: M_x ,: M_y .

Numerical values in the graphs must be multiplied by P

6. Experiment

In order to obtain an adequate experimental confirmation of the results of the theoretical analysis, the numerical results obtained before have been compared with the results of some tests.

(1) Description of apparatus

The present experiment has been carried out by the following manner.

Two opposite sides of a test plate are caught between two rigid steel rectangular frames having the knife edges along its opposite insides in a way to satisfy the boundary condition of simple supporting and also the some parts of these sides of the test plate are sandwiched by the additional steel blocks which are placed adhering closely to the outside of the knife edge and

fixed tightly by bolts and screw clamps so as to form the partially clamped edges. While, other two opposite sides of the test plate is laid free in the frames.

Next, the uniform load is applied by an air bag and the point load is given by a lever. The accuracy of the uniform load is retained within the range 0.01 kg/cm^2 with the aid of a mercury manometer and the point load is applied in 2 kg increments by the weight.

(2) Comparison of the experimental results with the theoretical conclusions

(a) Deflection

The deflections have been measured by dialgauges at each point dividing into equal 10 parts along the center lines $x = a/2$ and $y = b/2$.

Now, it may be of interest to compare the experimental results with the theoretical ones. The data for the plate under the uniform load are given in Table 4 and in Fig. 9.

Table 4. Comparison of calculated and observed deflections (mm) for the test plate (aluminium plate: $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm} \times 4.00 \text{ mm}$, Young's modulus = $663,000 \text{ kg/cm}^2$) under the uniform load (0.01 kg/cm^2)

Observed points	1	2	3	4	5	6'	7'	8'	9'	10'
Theoretical	0.0120	0.0374	0.0630	0.0809	0.0875	0.0900	0.0966	0.107	0.120	0.136
Experimental	0.014	0.040	0.066	0.082	0.088	0.091	0.097	0.108	0.116	0.125

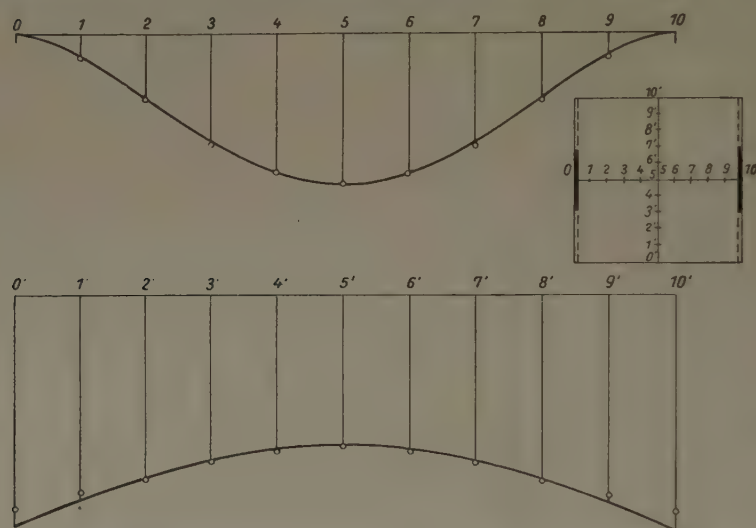


Fig. 9. The shapes of deflection along the two center lines of the plate under the uniform load distributed over the entire surface of it

Remarks: — : Theoretical
○ : Experimental

The data for the plate under a point load at the center are given in Table 5 and in Fig. 10. The experimental values of deflection agree very closely to the theoretical curves.

Table 5. Comparison of calculated and observed deflections (mm) for the test plate (aluminium plate: $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm} \times 2.97 \text{ mm}$, Young's modulus = $690,000 \text{ kg/cm}^2$) under the concentrated load (1 kg)

Observed points	1	2	3	4	5	6'	7'	8'	9'	10'
Theoretical	0.0056	0.0180	0.0325	0.0449	0.0511	0.0482	0.0424	0.0381	0.0354	0.0342
Experimental	0.006	0.019	0.0325	0.045	0.0505	0.047	0.042	0.0385	0.0355	0.034

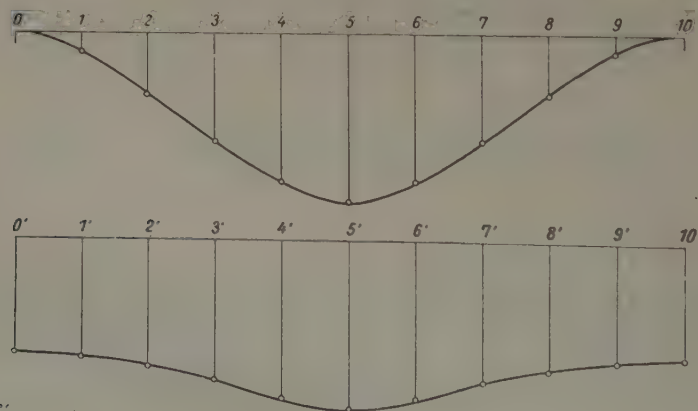


Fig. 10. The shapes of deflection along the two center lines of the plate under a point load at the center of the surface

Remarks: — : Theoretical
○ : Experimental

(b) *Bending moment*

The strains in x and y directions at the center of the surface of the plate under the uniform load have been measured by wire resistance strain meter and the results are listed in Table 6.

Table 6. Comparison of calculated and observed strains at the center of surface of the test plate (aluminium plate: 300 mm \times 300 mm \times 3.98 mm, YOUNG's modulus = 690,000 kg/cm²) under the uniform load (0.01 kg/cm²)

Observed point 5	ε_x	ε_y
Theoretical	29.4×10^{-6}	-10.7×10^{-6}
Experimental	29.8×10^{-6}	-10.6×10^{-6}
%	-1.4	+0.9

Remarks:

ε_x = Strain in x direction,
 ε_y = Strain in y direction,
% = $\frac{\text{Theoretical value} - \text{Experimental value}}{\text{Theoretical value}} \times 100.$




The experimental values of strain is in good agreement with the theoretical ones.

The measurement of strain in the center of the surface of a plate under a point load has been neglected because we have not the corresponding theoretical value.

7. Comparison of some results of the plates having two opposite free edges

It will now be interesting to compare the numerical results of the partially clamped plate in the present paper (clamped portion: $h = a/3$) with the numerical ones for the plates ($h = 0$ and $h = a$). This comparison is listed in Table 7 together with some experimental results.

Table 7. Comparison of some results of the plates having two opposite free edges

Edge conditions	Uniform load		Concentrated load	
	Theoretical	Experimental	Theoretical	Experimental
	$W = 0.1430$ $M_x = 0.1225$ $M_y = 0.0271$ $M'_x = 0$	0.1380 (+ 3.5) 0.119 (+ 2.9) 0.0265 (+ 2.2)	$W = 0.2533$ $M'_x = 0$	0.2460 (+ 2.9)
	$W = 0.0458$ $M_x = 0.056$ $M_y = -0.004$ $M'_x = -0.103$	0.0461 (- 0.7) 0.057 (- 1.8) - 0.0035 (+ 12.5)	$W = 0.1027$ $M'_x = -0.195$	0.1015 (+ 1.2)
	$W = 0.0283$ $M_x = 0.041$ $M_y = 0.011$ $M'_x = -0.084$	0.0285 (- 0.7) 0.039 (+ 4.9) 0.0105 (+ 4.5)		

Remarks:

1. Values of W represent the deflections at the center of the plates under a uniform load q and a central concentrated load P .
2. Values of W of the plate under a uniform load must be multiplied by qa^4/Eh^3 .
3. Values of W of the plate under a concentrated load must be multiplied by Pa^2/Eh^3 .
4. Values of M_x and M_y represent the moments in x and y directions at the center of the surface of the plate and also values of M'_x represent the moments at the center of clamped part of the edge.
5. Values of M_x , M_y and M'_x of the plate under a uniform load must be multiplied by qa^2 .
6. Values of M_x , M_y and M'_x of the plate under a concentrated load must be multiplied by P .
7. Values in the parentheses = $\frac{\text{Theoretical value} - \text{Experimental value}}{\text{Theoretical value}} \times 100.$
8. In this table, POISSON's ratio $\nu = 0.3$.

Manuskripteingang: 16. 5. 1959

Anschrift: Prof. Dr. MUNEAKI KURATA, Faculty of Eng., Osaka City University, Osaka (Japan),
Assistant HIROKAZU OKAMURA, dto

Überschallströmungen um pendelnde Drehkörper

Von JOHANN MÜNCH¹⁾

In der vorliegenden Arbeit wird ein zur praktischen Durchführung mit elektronischen Rechenanlagen geeignetes Quellsenkenverfahren für die Berechnung des Druckes an der Oberfläche mit beliebiger Frequenz im Überschallfeld pendelnder Drehkörper beschrieben.

A source-sink method, suitable for electronic computers, is given for computing the surface pressure on solids of rotational symmetry oscillating in an supersonic field with arbitrary frequency.

В настоящей работе описывается метод источников-стоков для вычисления давления на поверхность тел вращения, колеблющихся с произвольной частотой в сверхзвуковом поле. Этот метод применим для практических вычислений на электронных вычислительных машинах.

§ 1. Einleitung

Das bekannte Singularitätenverfahren der linearisierten Theorie von v. KÁRMÁN und MOORE [1]²⁾ zur Berechnung von stationären Überschallströmungen um axial angeströmte spitze und hinreichend schlanke Drehkörper wurde zunächst von TSIEN [2] auf den Fall schwach angestellter und später von SAUER [3] auf den nichtstationären Fall langsam und mit geringer Amplitude pendelnder Drehkörper übertragen.

Ein anderes Verfahren zur Berechnung von Strömungen um pendelnde Drehkörper wurde von HEINZ [4] entwickelt. Dabei werden die als Randbedingung auftretenden Integralgleichungen für die Belegungsfunktionen nicht, wie bei v. KÁRMÁN und MOORE, numerisch gelöst, sondern in lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen überführt. Ferner sind bei HEINZ neben den von SAUER betrachteten quasistationären Beiwerten für Normalkraft und Moment noch die nichtstationären aerodynamischen Beiwerte erklärt.

Weitere Methoden, Strömungen um langsam pendelnde Drehkörper zu bestimmen, kann man angeben, indem man die Arbeit von SAUER etwa dergestalt modifiziert, daß man an Stelle des Singularitätenverfahrens von v. KÁRMÁN und MOORE zum Beispiel dessen Verallgemeinerung von STETTER [5] oder die des Verfassers [6] zugrunde legt. Eine andere Möglichkeit wäre, vom Quellsenkenverfahren von PROBSTEIN und CHARYK [7] auszugehen.

In der vorliegenden Arbeit lassen wir die bei SAUER und HEINZ gestellte Forderung der langsamen Pendelung fallen und beschreiben ein zur praktischen Durchführung mit elektronischen Rechenanlagen geeignetes Quellsenkenverfahren für Drehkörper, die mit beliebiger Frequenz (soweit dies im Rahmen der linearisierten Theorie physikalisch sinnvoll ist) eine allgemeine elliptische Pendelbewegung ausführen. In der Methodik bauen wir dabei auf der Arbeit von SAUER auf, die gegenüber der von HEINZ den Vorzug besitzt, die Rechnungen auf Matrizenoperationen, welche sich bekanntlich mit Rechenautomaten leicht erledigen lassen, zurückzuführen.

Der Kürze und Übersichtlichkeit halber haben wir darauf verzichtet, das Quellsenkenverfahren auch für die oben genannten Modifikationen der Arbeit von SAUER zu beschreiben. Aus dem gleichen Grund ist auch nicht auf den von v. DYKE [8] und vom Verfasser [6] unabhängig voneinander untersuchten Fall eingegangen, daß Unstetigkeiten in den Ableitungen der Kontur zugelassen sein sollen, was sich ohne wesentliche Schwierigkeiten auf die vorliegenden Ausführungen übertragen ließe.

§ 2. Grundgleichungen

Das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, r, \omega, t)$ genügt im Rahmen der linearisierten Theorie der Differentialgleichung

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = - \frac{2M}{a_\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \dots \dots (1).$$

In dieser Gleichung bedeuten x, r, ω Zylinderkoordinaten, t die Zeit, $a_\infty = \text{const}$ die Schallgeschwindigkeit, $M = \text{const} > 1$ die MACHSche Zahl und $\alpha = \sqrt{M^2 - 1}$ den Cotangens des MACHSchen Winkels. Der Betrag der Gasgeschwindigkeit der ungestörten Strömung parallel zur Ebene $\omega = 0$ ist dann durch $U_\infty = M \cdot a_\infty$ gegeben.

¹⁾ Mit Unterstützung des Air Research and Development Command, United States Air Force, European Office, ARDC.

²⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der vorliegenden Arbeit.

Im Falle der stationären Strömung spezialisiert sich die Differentialgleichung (1) zu

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0 \quad (2)$$

und bei stationärer Strömung mit Achsensymmetrie zu

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (3).$$

Wir betrachten im Strömungsfeld einen hinreichend spitzen und schlanken Drehkörper der Länge l (siehe Bild 1). Zur Zeit $t = 0$ werde er unter dem Anstellwinkel $\vartheta = \text{const}$ angeströmt, falle seine Symmetrieachse in die x -Achse, seine Spitze in den Koordinatenursprung $x = r = 0$, ferner sei zu dieser Zeit die Gleichung seiner Konturkurve in einer Ebene $\omega = \text{const}$ durch $r = k(x)$ gegeben. Um den Punkt $x = b$ seiner Drehachse führe der Körper eine Pendelbewegung mit der Frequenz $\nu = \text{const}$ aus, die wir mit den Konstanten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \zeta_0$ und ζ_1 durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon_0(1 - \cos \nu t) + \varepsilon_1 \sin \nu t \quad \text{in } \omega = 0 \\ \zeta(t) &= \zeta_0(1 - \cos \nu t) + \zeta_1 \sin \nu t \quad \text{in } \omega = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} (4)$$

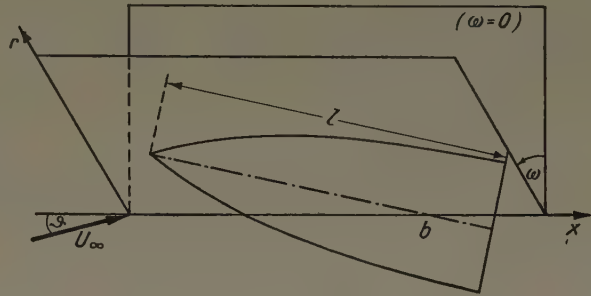


Bild 1

beschreiben. Als Gleichung der Konturkurve des Rotationskörpers zu einer beliebigen Zeit findet man somit

$$r = k^*(x, \omega, t) = k(x) - (x - b) (\varepsilon \cdot \cos \omega + \zeta \cdot \sin \omega)$$

und daraus für die r -Komponente der Strömungsgeschwindigkeit an der Körperoberfläche

$$\begin{aligned} \frac{dk^*}{dt} &= \frac{\partial k^*}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial k^*}{\partial x} = U_\infty k'(x) - U_\infty (\varepsilon_0 \cdot \cos \omega + \zeta_0 \cdot \sin \omega) \\ &+ [U_\infty \varepsilon_0 - \nu \varepsilon_1 (x - b)] \cos \omega \cos \nu t - [U_\infty \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_0 (x - b)] \cos \omega \sin \nu t \\ &+ [U_\infty \zeta_0 - \nu \zeta_1 (x - b)] \sin \omega \cos \nu t - [U_\infty \zeta_1 + \nu \zeta_0 (x - b)] \sin \omega \sin \nu t \quad (5). \end{aligned}$$

§ 3. Anfangs- und Randbedingung

Für die Ausgangsgleichungen (1) — (3) lassen sich mit m, n und δ als Konstanten durch LEGENDRESche Funktionen 2. Art und BESSELFunktionen darstellbare Lösungen angeben (siehe zum Beispiel [9]) und zwar

$$\varphi = \varphi^{(0)} = (\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2})^n \mathfrak{D}_n \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}} \right) \quad (6),$$

$$\varphi = \varphi^{(1)} = (\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2})^n \mathfrak{D}_n^m \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}} \right) \cdot e^{im\omega} \quad (7),$$

$$\varphi = \varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} \cdot \frac{J_{n+1/2}(\delta \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2})}{(\delta \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2})^{n+1/2}} \cdot e^{i\delta(\alpha^2 a_\infty t - Mx)} \quad (8)$$

der Reihe nach für die Differentialgleichungen (3), (2) und (1). Wir versuchen deshalb wegen Gleichung (5) mit $m = 1$ und $\delta = \frac{\nu}{\alpha^2 a_\infty}$ für das Gesamtpotential $\varphi(x, r, \omega, t)$ folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} \varphi(x, r, \omega, t) &= U_\infty (x + \vartheta r \cos \omega) + \varphi^{(0)}(x, r) + \psi_1^{(1)}(x, r) \cdot \cos \omega + \psi_2^{(1)}(x, r) \cdot \sin \omega \\ &+ \psi_3^{(1)}(x, r) \cdot \cos \omega + [\psi_1^{(2)}(x, r) \cdot \sin \omega + \psi_2^{(2)}(x, r) \cdot \cos \omega] \cos \left(\nu t - \frac{\nu M}{\alpha^2 a_\infty} x \right) \\ &+ [\psi_2^{(2)}(x, r) \cdot \sin \omega + \psi_3^{(2)}(x, r) \cdot \cos \omega] \sin \left(\nu t - \frac{\nu M}{\alpha^2 a_\infty} x \right) \quad (9). \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung verlangt, daß Potential und Geschwindigkeitskomponenten der Störströmung stromaufwärts des von der Drehkörperspitze ausgehenden MACHSchen Kegels verschwinden. Wegen der Linearisierungsannahmen (hinreichend kleine θ , ε und ζ) werden wir hier dieser Forderung nur in einer der Zeit $t = 0$ entsprechenden Lage des Drehkörpers genügen, d. h. wir verlangen

$$\left. \begin{aligned} q^{(0)} = \psi_k^{(1)} = \psi_l^{(2)} &\equiv 0 & \text{für } x - \alpha r \leq 0 \\ \frac{\partial q^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial q^{(0)}}{\partial r} = \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial r} &\equiv 0 & \text{für } x - \alpha r = 0 \end{aligned} \right\} \dots (10),$$

mit $k = 1, 2, 3$ und $l = 1, 2, 3, 4$. Die Randbedingung verlangt $\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{dk^*}{dt}$ an der Körperoberfläche. Diese Forderung wird ebenfalls nur in einer der Zeit $t = 0$ entsprechenden Lage des Drehkörpers und ferner lediglich an N hinreichend benachbarten Stellen $[x_\mu, r_\mu = k(x_\mu)]$, $\mu = 1, 2, \dots, N$, der Konturkurve erfüllt, d. h. wir fordern, wie man mit den Gleichungen (5) und (9) leicht bestätigt,

$$\frac{\partial q^{(0)}}{\partial r} = U_\infty k'(x), \quad \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} = -U_\infty \theta, \quad \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r} = -U_\infty \zeta_0, \quad \frac{\partial \psi_3^{(1)}}{\partial r} = -U_\infty \varepsilon_0,$$

$$\frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial r} \cos \frac{\nu M x}{\alpha^2 a_\infty} - \frac{\partial \psi_4^{(2)}}{\partial r} \sin \frac{\nu M x}{\alpha^2 a_\infty} = U_\infty \varepsilon_0 - \nu \varepsilon_1 (x - b),$$

$$\frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial r} \cos \frac{\nu M x}{\alpha^2 a_\infty} - \frac{\partial \psi_3^{(2)}}{\partial r} \sin \frac{\nu M x}{\alpha^2 a_\infty} = U_\infty \zeta_0 - \nu \zeta_1 (x - b),$$

$$\frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial r} \sin \frac{\nu M x}{\alpha^2 a_\infty} + \frac{\partial \psi_4^{(2)}}{\partial r} \cos \frac{\nu M x}{\alpha^2 a_\infty} = -U_\infty \varepsilon_1 - \nu \varepsilon_0 (x - b),$$

$$\frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial r} \sin \frac{\nu M x}{\alpha^2 a_\infty} + \frac{\partial \psi_3^{(2)}}{\partial r} \cos \frac{\nu M x}{\alpha^2 a_\infty} = -U_\infty \zeta_1 - \nu \zeta_0 (x - b)$$

an den Stellen (x_μ, r_μ) , oder mit den Abkürzungen $c = \cos \frac{\nu M x_\mu}{\alpha^2 a_\infty}$ und $s = \sin \frac{\nu M x_\mu}{\alpha^2 a_\infty}$ in etwas anderer Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} q_r^{(0)}(x_\mu, r_\mu) &= U_\infty k'(x_\mu), \\ \frac{1}{\vartheta} \psi_{1r}^{(1)}(x_\mu, r_\mu) &= \frac{1}{\zeta_0} \psi_{2r}^{(1)}(x_\mu, r_\mu) = \frac{1}{\varepsilon_0} \psi_{3r}^{(1)}(x_\mu, r_\mu) = -U_\infty, \\ \psi_{1r}^{(2)}(x_\mu, r_\mu) &= [U_\infty \zeta_0 - \nu \zeta_1 (x_\mu - b)] c - [U_\infty \zeta_1 - \nu \zeta_0 (x_\mu - b)] s, \\ \psi_{2r}^{(2)}(x_\mu, r_\mu) &= [U_\infty \varepsilon_0 - \nu \varepsilon_1 (x_\mu - b)] c - [U_\infty \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_0 (x_\mu - b)] s, \\ \psi_{3r}^{(2)}(x_\mu, r_\mu) &= -[U_\infty \zeta_1 - \nu \zeta_0 (x_\mu - b)] c - [U_\infty \zeta_0 - \nu \zeta_1 (x_\mu - b)] s, \\ \psi_{4r}^{(2)}(x_\mu, r_\mu) &= -[U_\infty \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_0 (x_\mu - b)] c - [U_\infty \varepsilon_0 - \nu \varepsilon_1 (x_\mu - b)] s \end{aligned} \right\} \dots (11).$$

Nach Festlegung der Teilpotentiale durch Anfangs- und Randbedingung bekommt man mit Gleichung (9) den Druck p aus

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty} = U_\infty \left(U_\infty - \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial t} \dots (12),$$

wo die Konstanten p_∞ und ϱ_∞ Druck und Dichte der ungestörten Strömung bedeuten.

§ 4. Einführung spezieller Funktionen

Im Hinblick auf die Lösungen (6)–(8) und den Ansatz (9) führen wir nun drei Funktionen $f(x, r)$, $g(x, r)$ und $h(x, r)$ ein, die samt ihren ersten Ableitungen nach x und r für $x - \alpha r = 0$ verschwinden sollen; weiterhin sollen

$$f(x, r), \quad g(x, r) \cdot \exp(i\omega) \quad \text{und} \quad h(x, r) \cdot \exp \left[i \left(\omega + \nu t - \frac{\nu M}{\alpha^2 a_\infty} x \right) \right]$$

der Reihe nach den Differentialgleichungen (3), (2) und (1) genügen. Mit den durch

$$F(x, r) = \begin{cases} f(x, r) & \text{für } x - \alpha r \geq 0 \\ 0 & \text{für } x - \alpha r < 0 \end{cases}, \quad G(x, r) = \begin{cases} g(x, r) & \text{für } x - \alpha r \geq 0 \\ 0 & \text{für } x - \alpha r < 0 \end{cases}$$

und

$$H(x, r) = \begin{cases} h(x, r) & \text{für } x - \alpha r \geq 0 \\ 0 & \text{für } x - \alpha r < 0 \end{cases}$$

definierten Funktionen F, G und H schreiben wir die Teilpotentiale des Ansatzes (9) mit $\xi_1 = x_0 = 0$, $\xi_{\mu+1} = x_\mu - \alpha r_\mu$ (siehe Bild 2) in der Form

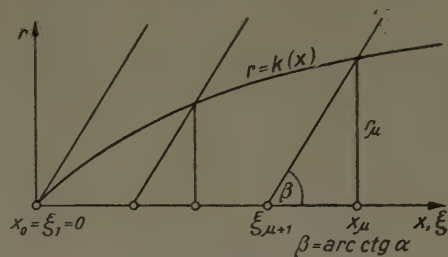


Bild 2

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(0)}(x, r) &= U_\infty \sum_{\sigma=1}^N a_\sigma F(x - \xi_\sigma, r), \\ \frac{1}{\vartheta} \psi_1^{(1)}(x, r) &= \frac{1}{\zeta_0} \psi_2^{(1)}(x, r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \psi_3^{(1)}(x, r) = U_\infty \sum_{\sigma=1}^N b_\sigma G(x - \xi_\sigma, r), \\ \psi_1^{(2)}(x, r) &= \sum_{\sigma=1}^N c_\sigma H(x - \xi_\sigma, r), \quad \psi_2^{(2)}(x, r) = \sum_{\sigma=1}^N d_\sigma H(x - \xi_\sigma, r), \\ \psi_3^{(2)}(x, r) &= \sum_{\sigma=1}^N e_\sigma H(x - \xi_\sigma, r), \quad \psi_4^{(2)}(x, r) = \sum_{\sigma=1}^N f_\sigma H(x - \xi_\sigma, r) \end{aligned} \right\} \dots \dots (13).$$

Mit den in § 3 erklärten Abkürzungen c und s liefert die Randbedingung (11) sodann für die $6N$ Konstanten $a_\sigma, b_\sigma, \dots, f_\sigma$ die $6N$ linearen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^{\mu} a_\sigma f_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) &= k'(x_\mu), \quad \sum_{\sigma=1}^{\mu} b_\sigma g_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) = -1, \\ \sum_{\sigma=1}^{\mu} c_\sigma h_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) &= [U_\infty \zeta_0 - \nu \zeta_1(x_\mu - b)] c - [U_\infty \zeta_1 + \nu \zeta_0(x_\mu - b)] s, \\ \sum_{\sigma=1}^{\mu} d_\sigma h_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) &= [U_\infty \varepsilon_0 - \nu \varepsilon_1(x_\mu - b)] c - [U_\infty \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_0(x_\mu - b)] s, \\ \sum_{\sigma=1}^{\mu} e_\sigma h_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) &= -[U_\infty \zeta_1 + \nu \zeta_0(x_\mu - b)] c - [U_\infty \zeta_0 - \nu \zeta_1(x_\mu - b)] s, \\ \sum_{\sigma=1}^{\mu} f_\sigma h_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) &= -[U_\infty \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_0(x_\mu - b)] c - [U_\infty \varepsilon_0 - \nu \varepsilon_1(x_\mu - b)] s \end{aligned} \right\} (14).$$

Die speziellen Funktionen

$$\left. \begin{aligned} f(x, r) &= f^{(n)}(x, r) = (\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2})^n \mathfrak{D}_n \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}} \right), \\ g(x, r) &= g^{(n)}(x, r) = \frac{\partial f^{(n+1)}(x, r)}{\partial r} = \alpha (\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2})^n \mathfrak{D}_n^1 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}} \right), \\ h(x, r) &= h^{(n)}(x, r) = g^{(n)}(x, r) \cdot \frac{J_{n+1/2} \left(\frac{\nu}{\alpha^2 a_\infty} \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2} \right)}{\left(\frac{\nu}{\alpha^2 a_\infty} \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2} \right)^{n+1/2}} \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\alpha^2 a_\infty}{\nu} \right)^n \sqrt{\frac{a_\infty}{\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}} \cdot \mathfrak{D}_n^1 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}} \right) \cdot J_{n+1/2} \left(\frac{\nu}{\alpha^2 a_\infty} \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2} \right) \end{aligned} \right\} (15)$$

erfüllen mit $n > \frac{1}{2}$ alle an sie gestellten Forderungen und wir können deshalb ab sofort n als natürliche Zahl annehmen. Die BESSELFunktionen sind dann elementar und man findet speziell

$$\lim_{(x-r) \rightarrow 0} \frac{J_{n+1/2} \left(\frac{\nu}{\alpha^2 a_\infty} \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2} \right)}{\left(\frac{\nu}{\alpha^2 a_\infty} \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2} \right)^{n+1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!}.$$

Für die ersten Ableitungen ergeben sich folgende Rekursionsbeziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^{(n)}(x, r)}{\partial x} &= n f^{(n-1)}(x, r), & \frac{\partial f^{(n)}(x, r)}{\partial r} &= g^{(n-1)}(x, r), \\ \frac{\partial g^{(n)}(x, r)}{\partial x} &= (n+1) g^{(n-1)}(x, r), & \frac{\partial g^{(n)}(x, r)}{\partial r} &= \alpha^2 n^2 f^{(n-1)}(x, r) - \frac{x}{r} g^{(n-1)}(x, r), \\ \frac{\partial h^{(n)}(x, r)}{\partial x} &= -\frac{\nu^2 x}{\alpha^2 a_\infty} \cdot \frac{g^{(n)}(x, r) h^{(n+1)}(x, r)}{g^{(n+1)}(x, r)} + (n+1) \frac{g^{(n-1)}(x, r) h^{(n)}(x, r)}{g^{(n)}(x, r)}, \\ \frac{\partial h^{(n)}(x, r)}{\partial r} &= \frac{\nu^2}{a_\infty} \cdot \frac{g^{(n)}(x, r) h^{(n+1)}(x, r)}{g^{(n+1)}(x, r)} + \left[\alpha^2 n^2 f^{(n-1)}(x, r) - \frac{x}{r} g^{(n-1)}(x, r) \right] \frac{h^{(n)}(x, r)}{g^{(n)}(x, r)} \end{aligned} \right\} \quad (16).$$

§ 5. Praktische Durchführung der Rechenarbeit

Im Falle $n = 1$ spezialisieren sich die Gleichungen (15) zu

$$\left. \begin{aligned} f(x, r) &= x \operatorname{ArCo} \left[\frac{x}{\alpha r} - \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2} \right], \\ g(x, r) &= \alpha^2 r \operatorname{ArCo} \left[\frac{x}{\alpha r} - \frac{x}{r} \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2} \right], \\ h(x, r) &= g(x, r) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{\alpha^2 a_\infty}{\nu \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}} \right)^3 \left(\sin \frac{\nu \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}}{\alpha^2 a_\infty} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}}{\alpha^2 a_\infty} \cos \frac{\nu \sqrt{x^2 - \alpha^2 r^2}}{\alpha^2 a_\infty} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (17).$$

Man erkennt $f(x, r)$ und $g(x, r)$ als die bekannten Lösungen von v. KÁRMÁN, MOORE und TSIEN. Mit den durch

$$\gamma_{\mu\sigma} = \begin{cases} \frac{x_\mu - \xi_\sigma}{\alpha r_\mu} & \text{für } \mu \geq \sigma \\ 1 & \text{für } \mu < \sigma \end{cases}, \quad w_{\mu\sigma} = \sqrt{\gamma_{\mu\sigma}^2 - 1}, \quad \beta_{\mu\sigma} = \frac{\nu}{\alpha a_\infty} r_\mu w_{\mu\sigma}$$

und $\tau_{\mu\sigma} = \operatorname{ArCo} \gamma_{\mu\sigma}$ definierten Größen $\gamma_{\mu\sigma}$, $w_{\mu\sigma}$, $\beta_{\mu\sigma}$, $\tau_{\mu\sigma}$ findet man für die ersten Ableitungen nach r an den Stellen (x_μ, r_μ) :

$$\left. \begin{aligned} f_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) &= -\alpha w_{\mu\sigma}, & g_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) &= \alpha^2 (\tau_{\mu\sigma} + \gamma_{\mu\sigma} w_{\mu\sigma}), \\ h_r(x_\mu - \xi_\sigma, r_\mu) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta_{\mu\sigma}^3} \left\{ \tau_{\mu\sigma} \left(1 + \frac{3}{w_{\mu\sigma}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{\mu\sigma} w_{\mu\sigma} \left(1 - \frac{3}{w_{\mu\sigma}^2} \right) \right\} (\sin \beta_{\mu\sigma} - \beta_{\mu\sigma} \cos \beta_{\mu\sigma}) + \frac{\nu r_\mu}{\alpha a_\infty} (\gamma'_{\mu\sigma} w_{\mu\sigma} - \tau_{\mu\sigma}) \sin \beta_{\mu\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (18).$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke (18) in die Randbedingung (14) lassen sich die Konstanten a_σ , b_σ , \dots , f_σ numerisch ermitteln; mit diesen Konstanten sind dann die Teilpotentiale durch die Gleichungen (13) gegeben.

Mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen können die numerischen Rechnungen (Matrizenoperationen an Dreiecksmatrizen) ohne wesentliche Schwierigkeiten ausgeführt werden. Der Kürze halber wollen wir den Weg nur am Beispiel des Teilpotentials $\varphi^{(0)}(x, r)$ aufzeigen und speziell die zur Bestimmung des Druckes an der Körperoberfläche nach Gleichung (12) maßgeblichen N Größen $\varphi_z^{(0)}(x_\mu, r_\mu)$ herleiten.

Durch $(w_{\mu\sigma}) = \mathfrak{B}$ und $(\tau_{\mu\sigma}) = \mathfrak{I}$ seien zwei N -reihige Dreiecksmatrizen \mathfrak{B} und \mathfrak{I} , ferner durch $(\varphi_z^{(0)}(x_\mu, r_\mu)) = \mathfrak{p}$, $(a_\mu) = \mathfrak{a}$ und $(k'(x_\mu)) = \mathfrak{f}$ drei Vektoren \mathfrak{p} , \mathfrak{a} und \mathfrak{f} mit je N Komponenten eingeführt. Die ersten der Gleichungen (14) und (18) lauten dann zusammengefaßt

$$-\alpha \mathfrak{B} \mathfrak{a} = \mathfrak{f} \quad (19).$$

Mit $f_z(x, r) = \mathfrak{U} \operatorname{Cof} \frac{x}{\alpha r}$ bekommt man aus der ersten der Gleichungen (13)

$$\mathfrak{p} = U_\infty \mathfrak{I} \mathfrak{a} \quad (20)$$

und daraus schließlich mit Gleichung (19) das Endergebnis

$$\mathfrak{p} = -\frac{U_\infty}{\alpha} \mathfrak{I} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{f} \quad (21).$$

Die Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte, auf die wir hier nicht eingehen, geschieht nach Berechnung des Druckes noch müheloser, da sich die auftretenden Integrationen mit Rechenautomaten etwa nach der SIMPSONschen Regel leicht erledigen lassen.

Legt man zur Berechnung der Strömung nicht das Singularitätenverfahren von v. KÁRMÁN und MOORE, sondern dessen Verallgemeinerung von STETTER [5] oder die des Verfassers [6] zugrunde, dann werden die Teilpotentiale insofern komplizierter, als in den Funktionen der Gleichungen (15) Indizes $n > 1$ vorkommen; dieselben Schwierigkeiten ergeben sich bei Verwendung des Quellsenkenverfahrens von PROBSTEIN und CHARYK [7]. Die Differentiationen nach r (für die Randbedingung) und nach x (für den Druck) wird man dann zweckmäßig mit Hilfe der Rekursionsformeln (16) vom Rechenautomaten ausführen lassen.

Schlußbemerkung: Zur Behandlung desselben Problems für den Unterschallbereich müssen zu den Lösungen (6)–(8) weitere Terme, die LEGENDRESche Funktionen 1. Art enthalten, hinzugenommen werden. Die Durchführung der praktischen Rechenarbeit verkompliziert sich dann insofern, als es sich nicht mehr um Dreiecksmatrizen, sondern um solche mit vollem Koeffizientenschema handelt.

Literatur

- [1] TH. v. KÁRMÁN and N. B. MOORE, The resistance of slender bodies moving with supersonic velocities with reference to projectiles, *Trans. Amer. Sc. Mech. Engr.* **54** (1932), p. 303–310.
- [2] SHUL-SHEN TSIEN, Supersonic flow over an inclined body of revolution, *Journ. Aeron. Sc.* **5** (1938), p. 480 bis 483.
- [3] R. SAUER, Beitrag zur aerodynamischen Theorie der Geschoßpendelung, unveröffentlichter Bericht LRBA 19/48 (1948).
- [4] C. HEINZ, Überschallströmungen um langsam pendelnde Drehkörper, *Mémoires sur la mécanique des fluides* (Jubilé scientifique de M. D. P. RIABOUCHINSKY), (1954), S. 119–126.
- [5] H. STETTER, Eine Verallgemeinerung des Kármán-Moore-Verfahrens zur Berechnung der linearisierten Überschallströmung um schlanke Drehkörper, *ZAMM* **37** (1957), S. 145–146.
- [6] J. MÜNCH, Beiträge zum Quellsenkenverfahren für die Berechnung von Überschallströmungen, *ZAMM* **37** (1957), S. 51–63.
- [7] R. PROBSTEIN and J. V. CHARYK, A method of solving the linear potential equation for axially symmetric flow, *Journ. Aeron. Sc.* **19** (1952), p. 139–140.
- [8] M. D. v. DYKE, First- and second-order theory of supersonic flow past bodies of revolution, *Journ. Aeron. Sc.* **18** (1951), p. 161–178.
Practical calculation of second-order supersonic flow past nonlifting bodies of revolution, NACA TN No. 2744.
- [9] H. J. STEWART, A review of source superposition and conical flow methods in supersonic wing theory, *Journ. Aeron. Sc.* **23** (1956), p. 507–516.

Manuskripteingang: 4. 6. 1959

Anschrift: Dr. JOHANN MÜNCH, München-Pasing, Nimmerfallstr. 25

Zur Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Methoden

Von ERWIN KREYSZIG

Die Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen lassen sich auf funktionentheoretischer Grundlage untersuchen. Als wichtiges Hilfsmittel dienen hierbei Bergman-Integraloperatoren, die analytische Funktionen in Lösungen solcher Gleichungen transformieren. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst auf die Anwendung funktionentheoretischer Methoden bei stationären zweidimensionalen Strömungen kompressibler Flüssigkeiten hingewiesen. Der zweite Abschnitt betrifft eine allgemeine Methode zur Einführung von Integraloperatoren. Schließlich werden einige grundlegende Eigenschaften harmonischer Funktionen dreier Veränderlicher unter Verwendung von Integraloperatoren untersucht.

The solutions of elliptic partial differential equations may be investigated by using the theory of functions. An important tool is Bergman integral operators which transform analytic functions into solutions of such equations. The first part of the present paper describes the use of function-theoretical methods in dealing with stationary two-dimensional flows of incompressible fluids. The second part concerns a general method of introducing integral operators. Finally, some fundamental properties of harmonic functions of three variables are investigated by using integral operators.

Решения эллиптических уравнений в частных производных можно исследовать на основе теории функций комплексного переменного. Важнейшим вспомогательным средством при этом являются интегральные операторы, преобразующие аналитические функции в решения таких уравнений. В настоящей работе прежде всего указывается на применение методов функций комплексного переменного к установившимся двумерным течениям сжимаемых жидкостей. Следующая часть посвящена общему методу для введения интегральных операторов. Затем исследуются некоторые основные свойства гармонических функций трех переменных при помощи интегральных операторов.

1. Zwei Wege zur funktionentheoretischen Behandlung partieller Differentialgleichungen

Die einfache Beziehung zwischen den harmonischen Funktionen zweier reeller Variabler und den analytischen Funktionen einer komplexen Variablen bildet ein Beispiel für den Zusammenhang zwischen der Theorie der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung und der Funktionentheorie. Die praktische Bedeutung dieses Zusammenhangs für die Theorie der Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten und andere zweidimensionale Potentialprobleme ist wohl bekannt. Es zeigt sich, daß sich auch die Theorie der ein- und mehrwertigen Lösungen allgemeinerer elliptischer partieller Differentialgleichungen zu einem guten Teil auf funktionentheoretischer Grundlage entwickeln läßt. Man kann nämlich grundlegende Methoden und Resultate der Theorie der komplex-analytischen Funktionen in systematischer Weise zur Gewinnung von Sätzen über Eigenschaften der genannten komplexen oder reellen Lösungen benutzen. In den letzten beiden Jahrzehnten sind zahlreiche Untersuchungen in dieser Richtung angestellt worden, vor allem von S. BERGMAN und seiner Schule. Einen zusammenfassenden Überblick über den gegenwärtigen Stand der Entwicklung gibt ein in Kürze erscheinender Bericht von BERGMAN [1].

Zur Behandlung partieller Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Methoden oder unter Benutzung funktionentheoretischer Ergebnisse kann man die folgenden beiden Wege einschlagen:

(A) Nach dem Vorbilde der klassischen Funktionentheorie läßt sich eine „modifizierte Funktionentheorie“ der „pseudoanalytischen“ komplexen Funktionen $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + i y$, entwickeln, bei denen u und v statt der CAUCHY-RIEMANN-Gleichungen ein System zweier allgemeinerer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung befriedigen.

(B) Man kann Integraloperatoren einführen, die komplex-analytische Funktionen in Lösungen gegebener partieller Differentialgleichungen transformieren.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich vor allem mit einigen Grundproblemen, die bei der Wahl des zweiten dieser beiden Wege auftreten. Die bisherigen Anwendungen von Integraloperatoren zeigen deutlich, daß man, um die Möglichkeiten, die diese Operatoren bieten, auch praktisch voll ausschöpfen zu können, die grundlegenden Eigenschaften der verwendeten Operatoren in allen Einzelheiten kennen muß; die Definition eines Operators und die Kenntnis seiner verschiedenartigen Darstellungen bilden stets nur den Ausgangspunkt und bleiben ohne eingehende weitere Untersuchungen praktisch wertlos. Dies erklärt auch, daß, obwohl die ersten Anfänge der Operatorentheorie schon über 50 Jahre zurückreichen (vgl. z. B. [2]), der Gedanke an praktische Anwendungen erst gefaßt werden konnte, als diese Theorie wenigstens in einigen wesentlichen Grundzügen entwickelt war (vgl. [3], [4] und die dort angegebene Literatur).

Die Reichhaltigkeit des in [1] gebotenen Materials zur Theorie der Integraloperatoren sollte übrigens nicht darüber hinwegtäuschen, daß zur Zeit viele grundlegende Probleme noch gar nicht oder in für praktische und numerische Zwecke nicht ausreichender Weise behandelt wurden.

Systeme der in (A) genannten Art treten bei verschiedenartigen Anwendungen auf. Wir wollen dies an Hand eines Beispiels kurz erläutern. Die Kontinuitätsgleichung einer zweidimensionalen stationären rotationsfreien Strömung einer Flüssigkeit, auf die keine äußeren Kräfte einwirken, lautet

$$(\varrho \Phi_x)_x + (\varrho \Phi_y)_y = 0.$$

Hierbei sind x und y kartesische Koordinaten, $\Phi(x, y)$ ist das Geschwindigkeitspotential der Strömung und ϱ die Dichte der Flüssigkeit. Diese Gleichung läßt sich als Integrabilitätsbedingung des Systems

$$\varrho \Phi_x = \Psi_y, \quad \varrho \Phi_y = -\Psi_x$$

auffassen, wobei $\Psi(x, y)$ die Stromfunktion der Strömung ist. Da ϱ eine Funktion des Betrages q des Geschwindigkeitsvektors $q = (q_1, q_2)$ ist, so sind diese beiden Gleichungen nichtlinear. Lineare Gleichungen erhalten wir durch den Übergang zur Hodographenebene, d. h. durch Einführung der Variablen q und $\Theta = \arctg (q_2/q_1)$; es ergibt sich

$$\Phi_q = \frac{M^2 - 1}{\varrho q} \Psi_\Theta, \quad \Phi_\Theta = \frac{q}{\varrho} \Psi_q \quad \dots \dots \dots (1.1).$$

$M = q/c$ ist die MACH-Zahl, $c = (dp/d\varrho)^{1/2}$ die lokale Schallgeschwindigkeit und p der Druck. Im Unterschallbereich können wir die Koeffizienten dieser Gleichungen durch Einführung der dimensionslosen Variablen

$$\sigma = \int_a^q s^{-1} (1 - M^2(s))^{1/2} ds \quad \dots \dots \dots (1.2)$$

auf die (abgesehen vom Vorzeichen) gleiche Form bringen; wir erhalten

$$\Phi_\Theta = S(\sigma) \Psi_\sigma, \quad \Phi_\sigma = -S(\sigma) \Psi_\Theta$$

mit

$$S(\sigma) = \varrho^{-1} (1 - M^2)^{1/2} \quad \dots \dots \dots (1.3).$$

Diese Gleichungen haben die Form

$$u_\xi = S(\eta) v_\eta, \quad u_\eta = -S(\eta) v_\xi \quad \dots \dots \dots (1.4)$$

und können als Verallgemeinerung der CAUCHY-RIEMANN-Gleichungen aufgefaßt werden. So liegt es nahe, Lösungspaare dieser Gleichungen zu „pseudoanalytischen Funktionen“

$$f(\zeta) = u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta)$$

der komplexen Variablen $\zeta = \xi + i \eta$ zusammenzufassen und die Theorie dieser Funktionen nach dem Muster der Funktionentheorie zu entwickeln. Dies beginnt damit, daß man die Ableitung einer solchen Funktion $f(\zeta)$ durch

$$f'(\zeta) = u_\xi + i v_\xi = S v_\eta - (i/S) u_\eta$$

und das Integral über ein rektifizierbares Kurvenstück C mit dem Anfangspunkt ζ_0 und dem Endpunkt ζ durch

$$F(\zeta) = \int_C f(\zeta) d\zeta = \int_C [u d\xi - S v d\eta] + i \int_C [v d\xi + (u/S) d\eta]$$

definiert. Wie man leicht zeigt, gilt der

Satz 1. Die Ableitung und das Integral einer pseudoanalytischen Funktion sind pseudoanalytische Funktionen. Differentiation und Integration sind inverse Prozesse.

Vom praktischen Standpunkt aus gesehen, bedeutet dies, daß man aus einem bekannten Paar von Lösungen der Gleichungen (1.4) durch Integration beliebig viele weitere Paare solcher Lösungen erhalten kann. Die ersten Ansätze zu einer derartigen Behandlung des Systems (1.4) stammen schon von PICARD und BELTRAMI, weitergehende Untersuchungen von BERS und GELBART [5], [6]. Es zeigt sich, daß man in der Theorie der pseudoanalytischen Funktionen viele Resultate erhält, die Ergebnissen der klassischen Funktionentheorie entsprechen. Zum Beispiel zeigten BERS und GELBART unter Benutzung der Idee des GOURSATSCHEN Beweises des CAUCHYschen Satzes: Ist $f(\zeta)$ eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G pseudoanalytische Funktion, so hat das Integral von $f(\zeta)$ über eine ganz in G verlaufende rektifizierbare geschlossene Kurve den Wert Null.

Es folgt nun ein kurzer Hinweis zur praktischen Verwendung der Integraloperatoren, wobei wir das vorstehend gewählte Anwendungsgebiet beibehalten und wiederum alle überflüssigen Einzelheiten beiseite lassen. Wir gehen von (1.1) aus, eliminieren Φ durch Differentiation, führen statt q die durch (1.2) gegebene Variable σ ein und setzen $\Psi = S^{-1/2} \Psi^*$ mit S gemäß (1.3); dann ergibt sich

$$\Delta \Psi^* + F(\sigma) \Psi^* = 0 \quad [\Delta = \partial^2/\partial \Theta^2 + \partial^2/\partial \sigma^2] \dots \dots \dots (1.5)$$

mit

$$F(\sigma) = -S^{-1/2} d^2(S^{1/2})/d\sigma^2.$$

Die explizite Form von F hängt von der Beziehung zwischen p und q ab. Ist z. B. $p = C q^*$ (κ das Verhältnis der spezifischen Wärmen), so erhält man durch Separation der Variablen zwei unendliche Folgen von Partikulärlösungen

$$\Psi_n^{(1)} = \varphi_n(\sigma) \cos n\Theta, \quad \Psi_n^{(2)} = \varphi_n(\sigma) \sin n\Theta, \quad n = 0, 1, \dots,$$

wobei die φ_n hypergeometrische Funktionen sind. Unter Verwendung dieser Lösungen hat CHAPLYGIN [7] die folgende Näherungsmethode zur Lösung von Randwertproblemen bei kompressiblen Strömungen entwickelt: Man bestimmt zunächst das komplexe Potential des zugehörigen inkompressiblen Problems und stellt die Stromfunktion Ψ dieses Problems in der Form

$$\tilde{\Psi} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \tilde{\Psi}_n^{(1)} + b_n \tilde{\Psi}_n^{(2)})$$

mit

$$\tilde{\Psi}_n^{(1)} = \sigma^n \cos n\Theta, \quad \tilde{\Psi}_n^{(2)} = \sigma^n \sin n\Theta$$

dar. Dann ist

$$\Psi = S^{-1/2} \Psi^* = S^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \Psi_n^{(1)} + b_n \Psi_n^{(2)})$$

eine Näherungslösung des gegebenen kompressiblen Problems.

Verschiedene praktisch wichtige Probleme können mit dieser CHAPLYGIN-Methode befriedigend behandelt werden. Bei anderen Problemen fallen jedoch die folgenden Schwierigkeiten ins Gewicht: 1. Ψ erfüllt bei Rückübertragung in die physikalische Ebene die Randbedingungen nur näherungsweise. 2. Die inkompressible Strömung hat Singularitäten in der Hodographenebene, so daß die obigen Entwicklungen für $\tilde{\Psi}$ und Ψ jeweils nur in einem Teil des betrachteten Bereichs konvergieren und man auf ein Fortsetzungsproblem geführt wird. Selbst wenn man dieses für den inkompressiblen Fall mit funktionentheoretischen Methoden gelöst hat, so bilden die zugehörigen, in den verschiedenen Teilbereichen gültigen Funktionen, die dem kompressiblen Fall entsprechen, im allgemeinen nicht die Fortsetzungen voneinander.

Um Lösungen im großen zu erhalten, muß man sich also nach einem anderen Zuordnungsprinzip zwischen den harmonischen Funktionen und den Lösungen der Gleichung (1.5) umsehen. Ein solches läßt sich nach BERGMAN [8] in der folgenden Weise gewinnen: Man nimmt keine Separation der Variablen vor, sondern setzt die Lösung von (1.5) in der Form

$$\Psi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(\sigma) h_n(\sigma, \Theta) \quad (h_n \text{ harmonisch})$$

an. Dann ist

$$\Delta \Psi^* + F \Psi^* = \sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda_n'' + F \lambda_n) h_n + 2 \lambda_n' (h_n)_\sigma] = 0,$$

wenn

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_{n+1}' = \lambda_n'' + F \lambda_n$$

$$h_0 \text{ beliebig harmonisch,} \quad (h_n)_\sigma = -h_{n-1}/2$$

gewählt wird. Dabei hängen die λ_n nur von F ab und sind durch die Zusatzbedingung $\lambda_n(-\infty) = 0$ eindeutig bestimmt. F hängt seinerseits nur von der Form der Beziehung zwischen dem Druck und der Dichte der betreffenden Strömung ab, so daß die λ_n nach Vorgabe einer solchen Beziehung ein- für allemal vertafelt werden können. Setzen wir $h_0 = \text{Re } f_0$, wobei $f_0(\zeta)$ eine beliebige analytische Funktion von $\zeta = \sigma + i\Theta$ ist, und $h_n = \text{Re } f_n$ mit

$$f_n(\zeta) = -\frac{1}{2} \int_0^\zeta f_{n-1}(\tau) d\tau,$$

dann ist die Rekursionsbeziehung für die h_n erfüllt, und wir erhalten unter der Voraussetzung, daß $f_0(0) = 0$ ist,

$$h_n(\sigma, \Theta) = \operatorname{Re} f_n(\zeta) = \frac{(-1)^n}{(n-1)! 2^n} \operatorname{Re} \int_0^\zeta f_0(\tau) (\zeta - \tau)^{n-1} d\tau = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \operatorname{Re} \int_0^\zeta f_0'(\tau) (\zeta - \tau)^n d\tau.$$

Dies wird in den obigen Ansatz eingesetzt, und man bestimmt den Bereich der gleichmäßigen Konvergenz durch die Betrachtung einer geeigneten Majorante (vgl. [8]), worauf wir hier nicht näher eingehen wollen. Setzen wir

$$E(\sigma, \Theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \lambda_n (\zeta - \tau)^n,$$

so hat die erhaltene Lösung die Form

$$\Psi^* = \operatorname{Re} p(f_0') \equiv \operatorname{Re} \int_0^\zeta E(\sigma, \Theta, \tau) f_0'(\tau) d\tau \quad (1.6),$$

wobei f_0' auf Grund des gegebenen Strömungsproblems geeignet zu bestimmen ist, vgl. [8]. In (1.6) haben wir einen Integraloperator p vorliegen, der eine beliebige im Nullpunkt reguläre analytische Funktion in eine Lösung einer gegebenen elliptischen Differentialgleichung transformiert. E heißt die Erzeugende dieses Operators, und f_0' heißt die Zugeordnete der betreffenden Lösung.

Der vorstehende Überblick sollte auf einige Anwendungsmöglichkeiten der Theorie der pseudoanalytischen Funktionen und der Integraloperatoren hinweisen. In den folgenden Abschnitten behandeln wir einige Grundprobleme der Operatorentheorie.

2. Eine Methode zur Gewinnung von Integraloperatoren

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\Delta \Psi + \alpha \Psi_x + \beta \Psi_y + \gamma \Psi = 0 \quad (2.1)$$

und setzen voraus, daß α , β und γ analytische Funktionen der reellen Variablen x und y sind. Setzen wir diese Funktionen ins Komplexe fort, indem wir auch komplexe Werte von x und y zulassen und führen wir die (für komplexe x, y unabhängigen) Variablen

$$z = x + i y, \quad z^* = x - i y$$

ein, so ergibt sich aus (2.1) wegen

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

die Gleichung

$$w_{zz^*} + a w_z + b w_{z^*} + c w = 0, \quad \Psi(x, y) \equiv w(z, z^*).$$

Diese läßt sich noch vereinfachen. Wir setzen

$$w = u \exp \left\{ - \int_0^{z^*} a(z, \zeta) d\zeta \right\}$$

und erhalten

$$L(u) \equiv u_{zz^*} + B u_z + C u = 0 \quad (2.2),$$

wobei B und C analytische Funktionen von z, z^* sind. Um Operatoren zu gewinnen, machen wir nun den Ansatz

$$u = P(f) \equiv \int_k^l E(z, z^*, t) f(\varphi(z, t)) H(t) dt \quad (2.3),$$

wobei f eine beliebige analytische Funktion einer komplexen Variablen bedeutet und $\varphi(z, t)$ für $k \leq t \leq l$ und alle endlichen komplexen z regulär ist. Beim Einsetzen dieser Darstellung in (2.2) tritt ein Glied auf, das die partielle Ableitung f_z enthält. Dieses wird unter Benutzung von $f_z = f_t \varphi_z / \varphi_t$ partiell nach t integriert. So erhält man

$$L(u) = \int_k^l \{L(E) + M(E)\} f H dt + A f|_k^l,$$

wobei

$$A(z, z^*, t) = E_{z^*} H \varphi_z / \varphi_t$$

und $M(E)$ ein linearer Differentialausdruck in E ist, dessen Form noch von der Wahl von $\varphi(z, t)$ und $H(t)$ abhängt. Demnach gilt der

Satz 2. Ist $E(z, z^*, t)$ eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$L(E) + M(E) = 0 \quad (2.4),$$

für die

$$A(z, z^*, k) = 0 \quad \text{und} \quad A(z, z^*, l) = 0 \quad (2.5)$$

gilt, so ist (2.3) eine Lösung der Gleichung (2.2).

Um Operatoren $P(f)$ zu erhalten, benötigt man also Lösungen der Gleichung (2.4). Dabei wird man $\varphi(z, t)$, $H(t)$ und die Integrationsgrenzen k und l so wählen, daß (2.4) eine einfache Form besitzt und (2.5) eine möglichst geringfügige Bedingung hinsichtlich der Erzeugenden E des Operators bedeutet. Auf diesem Wege kann man verschiedenartige Operatoren zur Erzeugung von Lösungen der Gleichung (2.2) aus analytischen Funktionen erhalten.

Beispiel: Für $\varphi(z, t) = z(1 - t^2)/2$, $h(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ und $k = -1$, $l = 1$ erhält man den BERGMAN-Operator

$$u(z, z^*) = B(f) = \int_{-1}^1 E(z, z^*, t) f(z(1 - t^2)/2) (1 - t^2)^{-1/2} dt \quad (2.6).$$

In (2.4) ist dann

$$M(E) = \frac{1 - t^2}{2 z t} E_{z^* t} - \frac{1}{2 z t^3} E_{z^*},$$

und aus (2.5) ergibt sich die Bedingung, daß $E_{z^*}/2 z t$ für $z = 0$, $t = 0$ stetig sein muß.

Die Wahl des Operators richtet sich nach dem verfolgten Zweck. Um aus funktionentheoretischen Ergebnissen Sätze über das Verhalten der genannten Lösungen zu gewinnen, muß der Operator so beschaffen sein, daß er grundlegende Eigenschaften der analytischen Funktionen f invariant läßt oder in überschaubarer Weise transformiert. Hat der inverse Operator

$$f(z) = P^{-1}(u)$$

eine einfache Gestalt, so kann man z. B. das Koeffizientenproblem der Lösungen $u(z, z^*)$ mit funktionentheoretischen Mitteln behandeln und auf diese Weise aus den Koeffizienten c_{mn} der Entwicklung

$$u(z, z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} z^m z^{*n}$$

einer Lösung u auf die Anzahl und die Natur und Lage der Singularitäten der betreffenden Lösung schließen; vgl. z. B. [9].

Wählt man für E eine bestimmte Klasse spezieller Funktionen (z. B. Polynome von t , deren Koeffizienten von z und z^* abhängen), so ergeben sich aus dieser Wahl Bedingungen über die Form der Koeffizienten von (2.2). So erhebt sich das grundlegende Problem der Bestimmung der Klassen spezieller Erzeugender E und der zugehörigen Klassen partieller Differentialgleichungen (2.2), deren Lösungen sich in der Form (2.3) mit einer solchen Erzeugenden darstellen lassen. Hierüber ist zur Zeit noch sehr wenig bekannt. Ein erstes abschließendes Resultat in dieser Richtung, und zwar über Operatoren (2.6) mit Erzeugenden der Form

$$E(z, z^*, t) = \exp \left\{ \sum_{\mu=0}^m q_{\mu}(z, z^*) t^{\mu} \right\},$$

findet man in [10]. Besonders bemerkenswert ist, daß die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen (2.2) unendliche Folgen unabhängiger Partikulärlösungen besitzen, die zugleich gewöhnliche lineare Differentialgleichungen befriedigen, so daß man auf diese Weise die FUCHSsche Theorie bei der Untersuchung dieser Lösungen heranziehen kann; vgl. [12].

Der vorstehende Gedankengang läßt sich verallgemeinern und bei der Einführung von Operatoren für elliptische Gleichungen 4. Ordnung sowie für Systeme zweier elliptischer Gleichungen 2. Ordnung verwenden. Im Falle solcher Systeme erhält man Operatoren, die analytische Funktionen zweier komplexer Variabler in Lösungen der genannten Gleichungen transformieren. Da die Theorie der genannten analytischen Funktionen jedoch noch nicht so weit entwickelt ist wie die klassische Funktionentheorie, so haben diese Operatoren zur Zeit eine geringe praktische Bedeutung.

3. Die Laplace-Gleichung in 3 Veränderlichen

Auch für partielle Differentialgleichungen in 3 unabhängigen Variablen existieren Integraloperatoren, die analytische Funktionen in Lösungen solcher Gleichungen transformieren. Trotz der erheblichen prinzipiellen Schwierigkeiten, die sich beim Übergang von 2 zu 3 oder mehr unabhängigen Variablen ergeben, lassen sich auf diese Weise mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden Ergebnisse gewinnen, die von praktischem Interesse sind.

Wir betrachten die LAPLACE-Gleichung

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz} = 0.$$

Mit

$$X = x, \quad Z = \frac{1}{2}(z + iy), \quad Z^* = -\frac{1}{2}(z - iy)$$

erhalten wir

$$H_{XX} - H_{ZZ^*} = 0, \quad H(X, Z, Z^*) \equiv \Psi(x, y, z) \quad (3.1).$$

Ist $f(u, \zeta)$ eine analytische Funktion von

$$u = X + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}$$

und ζ , so ist

$$H(X, Z, Z^*) = Q(f) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(u, \zeta) \zeta^{-1} d\zeta \quad (3.2)$$

eine Lösung von (3.1). Dieser Operator $Q(f)$ wurde schon von WHITTAKER [2], allerdings nur für lokale Untersuchungen, und späterhin von BERGMAN [13] benutzt. Indem man für f Polynome, rationale Funktionen, algebraische Funktionen usw. wählt, gelangt man zu einer systematischen Klassifikation der harmonischen Funktionen H derart, daß die Funktionen jeder solchen Klasse gewisse grundlegende Eigenschaften miteinander gemeinsam haben.

Wählt man

$$f(u, \zeta) = u^m \zeta^n \quad (n \text{ ganz}, m = 0, 1, \dots),$$

so erhält man im wesentlichen Kugelfunktionen. Interessanter sind Funktionen H , deren Zugeordnete $f(u, \zeta)$ Singularitäten besitzen. Betrachten wir zum Beispiel

$$f = \zeta/p(u, \zeta),$$

wobei p ein Polynom in u und ζ mit komplexen Koeffizienten ist, das für alle (x, y, z) in einem gewissen Bereich B des xyz -Raumes lauter einfache Nullstellen besitzt. Dann können wir mit Hilfe des Residuensatzes einen expliziten Ausdruck für die zugehörige Funktion H erhalten. Nun hängen die Nullstellen von p von x, y, z ab und liegen für gewisse Punkte (x, y, z) auf dem Integrationsweg $|\zeta| = 1$. Diese Punkte bilden gewisse Regelflächen, die den (im allgemeinen mehrfach überdeckten) reellen xyz -Raum derart in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegen, daß H in diesen verschiedenen Teilen durch verschiedene analytische Ausdrücke gegeben ist. Jede dieser so erhaltenen Funktionen können wir analytisch in den ganzen Raum fortsetzen und deren Singularitäten untersuchen. Ähnlich ist die Lage bei komplizierteren rationalen Funktionen f .

Umgekehrt kann man gewisse Typen algebraischer Kurven im reellen xyz -Raum vorgeben und dazu Funktionen f derart bestimmen, daß die zugehörigen, wie soeben beschriebenen fortgesetzten Funktionen H längs dieser Kurven singulär und sonst regulär sind. Z. B. gilt der einfache

Satz 3. *Es sei K ein beliebiger gegebener Kreis im xyz -Raum. Dann lassen sich die (komplexen) Koeffizienten a, b, c von*

$$f(u, \zeta) = \zeta/[a + (b + u)\zeta + c\zeta^2]$$

so bestimmen, daß die zugehörige harmonische Funktion H genau längs K singulär ist.

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe des Residuensatzes, aus dem folgt, daß die Singularitäten von H in den Punkten liegen, in denen die Diskriminante des Polynoms $a + (b + u)\zeta + c\zeta^2$ verschwindet.

Um die Untersuchungsmethoden und die typischen Eigenschaften der mittels Integraloperatoren gewonnenen harmonischen Funktionen noch etwas näher zu beleuchten, betrachten

wir nun die Funktionen¹⁾

$$H_{mn}(X, Z, Z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (u-k)^{-m} \zeta^{n-1} d\zeta \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, \dots \\ n \text{ ganz} \\ k = \kappa + i\lambda = \text{konst.} \end{array} \quad (3.3)$$

und deren Singularitäten. Den Integranden bezeichnen wir mit F . Es ist

$$F = Z^{-m} [(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)]^{-m} \zeta^{m+n-1},$$

wobei

$$\zeta_1 = (2Z)^{-1}(R-p), \quad \zeta_2 = -(2Z)^{-1}(R+p) \quad [R = (p^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, p = x - k]$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\zeta^2 + Z^{-1}p\zeta + Z^{-1}Z^* = 0$$

sind. F hat im Punkte $\zeta = \zeta_1$ das Residuum

$$A_{mn} = (-1)^{m+1} Z^{-m} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \binom{m+\lambda-1}{\lambda} \binom{-n-\lambda-1}{m-\lambda-1} \zeta_1^{n+\lambda} (\zeta_1 - \zeta_2)^{-m-\lambda},$$

oder wegen $\zeta_1 - \zeta_2 = R/Z$

$$A_{mn} = (-1)^{m+1} R^{-m} \zeta_1^n \sum_{\lambda=0}^{m-1} \binom{m+\lambda-1}{\lambda} \binom{-n-\lambda-1}{m-\lambda-1} Z^\lambda R^{-\lambda} \zeta_1^\lambda \quad (3.4)$$

und im Punkte $\zeta = \zeta_2$ das Residuum

$$B_{mn} = R^{-m} \zeta_2^n \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda+1} \binom{m+\lambda-1}{\lambda} \binom{-n-\lambda-1}{m-\lambda-1} Z^\lambda R^{-\lambda} \zeta_2^\lambda \quad (3.5).$$

Für $n \leq -m$ hat F einen weiteren Pol im Punkt $\zeta = 0$, und das Residuum ist

$$C_{mn} = Z^{-m} \zeta_1^{-m} \zeta_2^n \sum_{\lambda=0}^{-m-n} \binom{m+\lambda-1}{\lambda} \binom{-n-\lambda-1}{-m-n-\lambda} \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)^\lambda \quad (3.6).$$

Es ist

$$|\zeta_1| \leq 1, \quad |\zeta_2| \leq 1 \quad (x \geq \operatorname{Re} k).$$

Auf Grund des Residuensatzes gelten also die Darstellungen

$$H_{mn} = \begin{cases} A_{mn} & (x > \operatorname{Re} k) \\ B_{mn} & (x < \operatorname{Re} k) \end{cases} \quad (n > -m) \quad (3.7)$$

bzw.

$$H_{mn} = \begin{cases} A_{mn} + C_{mn} & (x > \operatorname{Re} k) \\ B_{mn} + C_{mn} & (x < \operatorname{Re} k) \end{cases} \quad (n \leq -m) \quad (3.8).$$

Wir betrachten die Singularitäten der Funktionen auf der rechten Seite von (3.7) und (3.8) im ganzen Raum. Aus dem Residuensatz folgt zunächst, daß diese vier Funktionen längs des Kreises (bzw. für reelles k in dem Punkt)

$$x = \operatorname{Re} k, \quad y^2 + z^2 = (\operatorname{Im} k)^2 \quad (3.9)$$

singulär sind. Weitere Singularitäten können in Punkten der x -Achse ($y = z = 0$, d. h. $Z = 0$) auftreten. Aus der Form der Residuen folgt, daß dies keine wesentlichen Singularitäten sein können. Um das Verhalten der Funktionen in einem solchen Punkt P zu untersuchen, können

¹⁾ Ein Nachteil der Integraloperatoren im Zusammenhang mit praktischen Problemen ist die Tatsache, daß die erhaltenen Lösungen im allgemeinen nicht in einfacher Weise mit bekannten speziellen Funktionen zusammenhängen. Es ist deshalb bemerkenswert, daß, wie man zeigen kann, sich die Funktionen H_{mn} durch hypergeometrische Funktionen darstellen lassen, worauf wir in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingehen wollen.

wir demnach $\mathfrak{x} = (x, y, z)$ in irgendeiner Weise gegen P streben lassen, etwa längs einer Geraden $x = \text{konst.}$ in der xz -Ebene. Für $y = 0$ wird

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \zeta_1 &= \begin{cases} \frac{z}{2p} - \frac{z^3}{8p^3} + \dots & (\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_1) \\ \frac{2q}{z} + \frac{z}{2q} + \dots & (\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_2) \end{cases} \\ \text{(b)} \quad \zeta_2 &= \begin{cases} -\frac{2p}{z} - \frac{z}{2p} + \dots & (\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_1) \\ -\frac{z}{2q} + \frac{z^3}{8q^3} + \dots & (\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_2) \end{cases} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3.10),$$

wobei $p = x - k$, $q = -p$ ist und \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 die Gebiete $\text{Re } p > 0$ bzw. $\text{Re } p < 0$ bezeichnen. Weiterhin seien \mathfrak{U}_1 bzw. \mathfrak{U}_2 die Teile der x -Achse in \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 .

Aus (3.4) und (3.10a) folgt: Für $n \geq 0$ ist A_{mn} in \mathfrak{R}_1 regulär. Für $0 > n > -m$ ist

$$\binom{-n-\lambda-1}{m-\lambda-1} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \dots, -n-1),$$

(3.4) beginnt mit dem $\lambda = -n$ entsprechenden Glied, und in diesem Glied hat $(\zeta_1 Z)^{-n}$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{U}_1$ wegen (3.10a) eine Nullstelle der Ordnung $-2n (> 0)$, während etwa vorhandene weitere Glieder Nullstellen von noch höherer Ordnung besitzen. Da der Faktor ζ_1^n in (3.4) für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{U}_1$ einen Pol der Ordnung $-n$ besitzt, so ergibt sich insgesamt, daß A_{mn} für $n > -m$ in \mathfrak{R}_1 regulär ist. Für $n \leq -m$ ist A_{mn} singulär längs \mathfrak{U}_1 und regulär in $\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{U}_1$, wie man aus (3.4) und (3.10a) sieht.

Wir betrachten A_{mn} in \mathfrak{R}_2 . Daß A_{mn} für $n \leq 0$ in \mathfrak{R}_2 regulär ist, sieht man unmittelbar aus (3.4) und (3.10a). Aus

$$(Z \zeta_1/R)^\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} (Z \zeta_2/R)^\nu$$

und (3.4) folgt

$$A_{mn} = (-1)^{m+1} R^{-m} \zeta_1^n \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{m+\lambda-1}{\lambda} \binom{-n-\lambda-1}{m-\lambda-1} \binom{\lambda}{\nu} (Z \zeta_2/R)^\nu \dots (3.11).$$

Von dem Vorfaktor abgesehen, hat $(Z \zeta_2/R)^\nu$ den Koeffizienten

$$K_{mn\nu} = \sum_{\lambda=\nu}^{m-1} \binom{m+\lambda-1}{\lambda} \binom{-n-\lambda-1}{m-\lambda-1} \binom{\lambda}{\nu} = (-1)^{m-1} \binom{n-\nu-1}{m-\nu-1},$$

und es ist

$$K_{mn\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (n = 1, 2, \dots, m-1).$$

Für $0 < n < m$ ist also $(Z \zeta_2/R)^\nu$ die niedrigste in (3.11) auftretende Potenz von $Z \zeta_2/R$. Mit (3.10) folgt hieraus, daß A_{mn} für $n < m$ in \mathfrak{R}_2 regulär ist. Für $n \geq m$ ist $K_{mn0} \neq 0$. Hieraus ergibt sich, daß A_{mn} für $n \geq m$ längs \mathfrak{U}_2 singulär und in $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{U}_2$ regulär ist.

Das Verhalten von B_{mn} ergibt sich unmittelbar aus den bisherigen Betrachtungen, indem man bedenkt, daß B_{mn} durch Vertauschung von ζ_1 und ζ_2 aus A_{mn} hervorgeht. Das Verhalten von C_{mn} läßt sich in ähnlicher Weise untersuchen wie dasjenige von A_{mn} . Schließlich muß man noch die Summen $A_{mn} + C_{mn}$ und $B_{mn} + C_{mn}$ in (3.8) daraufhin untersuchen, daß sich bei der Summierung z. B. von A_{mn} und C_{mn} nicht die vorhandenen Singularitäten paarweise alle wegheben. Es zeigt sich, daß dies nicht der Fall ist. Damit können wir das Ergebnis folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 4. Die harmonischen Funktionen (3.3) sind längs der Ebene $x = \text{Re } k$ unstetig. Setzt man $\mathfrak{x} = (x, y, z)$ und

$$H_{mn} = \begin{cases} H_{mn}^{(1)} & \text{für } \mathfrak{x} \text{ in dem Gebiet } \mathfrak{R}_1: \quad x > \text{Re } k \\ H_{mn}^{(2)} & \text{für } \mathfrak{x} \text{ in dem Gebiet } \mathfrak{R}_2: \quad x < \text{Re } k, \end{cases}$$

so sind $H_{mn}^{(1)}$ und $H_{mn}^{(2)}$ für $n > -m$ durch (3.7) und für $n \leq -m$ durch (3.8) gegeben. Diese Funktionen sind längs des durch (3.9) dargestellten Kreises (bzw. Punktes) singulär und verhalten sich, im ganzen xyz -Raum betrachtet, wie folgt:

I. Für $n \geq m$ ist $H_{mn}^{(1)}$ längs des Teiles $\mathfrak{A}_2: x < \operatorname{Re} k$ der x -Achse singulär und im Bereich $\mathfrak{R}_1 \cup (\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{A}_2)$ regulär, während $H_{mn}^{(2)}$ längs des Teiles $\mathfrak{A}_1: x > \operatorname{Re} k$ der x -Achse singulär und im Bereich $(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{A}_1) \cup \mathfrak{R}_2$ regulär ist.

II. Für $-m < n < m$ sind $H_{mn}^{(1)}$ und $H_{mn}^{(2)}$ im Bereich $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ regulär.

III. Für $n \leq -m$ sind $H_{mn}^{(1)}$ und $H_{mn}^{(2)}$ längs der x -Achse singulär und im übrigen Teil des Bereiches $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ regulär.

Schließlich sei noch angemerkt, daß sich die vorstehenden Methoden zum Teil verallgemeinern und bei der Untersuchung von Gleichungen der Form

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz} + a(r^2) \Psi = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und anderer Gleichungen in drei unabhängigen Variablen verwenden lassen.

Literatur

- [1] S. BERGMAN, Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations. Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb., Berlin: J. Springer, im Druck.
- [2] E. T. WHITTAKER, On the partial differential equations of mathematical physics. Math. Ann. 57 (1903), p. 333—355.
- [3] S. BERGMAN, Operatorenmethoden in der Gasdynamik. ZAMM 32 (1952), S. 33—45.
- [4] S. BERGMAN, New methods for solving boundary value problems. ZAMM 36 (1956), p. 182—191.
- [5] L. BERS and A. GELBART, On a class of functions defined by partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944), p. 67—93.
- [6] L. BERS, Partial differential equations and generalized analytic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1951), p. 42—47.
- [7] S. A. CHAPLYGIN, On gas jets. Ann. Univ. Moskau, phys.-math. Abt. (1904).
- [8] S. BERGMAN, Two-dimensional flows of compressible fluids. Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes (1945), p. 972, 973; (1946), p. 1018, 1096.
- [9] E. KREYSZIG, Relations between properties of solutions of partial differential equations and the coefficients of their power series development. J. Math. Mech. 6 (1957), p. 361—382.
- [10] E. KREYSZIG, On a class of partial differential equations. J. rat. Mech. Analysis 4 (1955), p. 907—923.
- [11] E. KREYSZIG, On coefficient problems of solutions of partial differential equations of the fourth order. J. rat. Mech. Analysis 6 (1957), p. 811—822.
- [12] E. KREYSZIG, On some relations between partial and ordinary differential equations. Canad. J. Math. 10 (1958), p. 183—190.
- [13] S. BERGMAN, Zur Theorie der ein- und mehrwertigen harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes. Math. Z. 24 (1925), S. 641—669.

Manuskripteingang: 25. 6. 1959

Anschrift: Prof. Dr. E. KREYSZIG, Dept. of Mathematics, Ohio State University, Columbus, Ohio, USA

ZAMM 40 (1960) Heft 7/8, Seite 342—349

Zur Einschließung von Eigenwerten unter Verwendung des Maximum-Minimum-Prinzips*)

Von WERNER BOLLERMANN

Es wird ein Verfahren zur Ermittlung von unteren Schranken für Eigenwerte hergeleitet, die bei Eigenwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen des selbstadjungierten und volldefiniten Typs auftreten.

A method is derived for finding lower bounds for eigenvalues pertaining to eigenvalue problems of ordinary linear differential equations that are self-adjoint and full-definite.

Выводится способ для определения нижних границ собственных значений, встречающихся в задачах о собственных значениях обыкновенных линейных дифференциальных уравнений самосопряженного и полно определенного типа.

1. Einleitung

Das RITZ-GALERKINSche Verfahren liefert bekanntlich bei Eigenwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen in der selbstadjungierten und volldefiniten Form obere Schranken für die Eigenwerte. Innerhalb dieser Arbeit soll bei möglichst geringer Einengung des Anwendungs-

*) Kurzfassung der Dissertation des Verfassers: Hannover 1958, Ref. Prof. Dr.-Ing. H. UNGER und Prof. Dr.-Ing. K. JAECKEL.

bereiches ein Verfahren zur Ermittlung unterer Schranken hergeleitet werden. Dabei darf die vorgelegte Aufgabe in allen Gliedern der Differentialgleichung von einer bekannten benachbarten Aufgabe abweichen und nur für diese wird die Gültigkeit des Entwicklungssatzes verlangt.

Mit der Forderung, daß alle Vergleichsfunktionen verallgemeinert orthogonal zu den ersten $n - 1$ Eigenfunktionen der benachbarten Aufgabe im Sinne des Maximum-Minimum-Prinzips von COURANT sein sollen, kommt man zu Abschätzungsformeln für den n -ten Eigenwert nach unten.

2. Problemklasse. Hilfsmittel

Die gestellte Eigenwertaufgabe:

$$M[y] = k N[y], \quad U_i[y] = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

sei selbstadjungiert und volldefinit (ohne den Eigenwert k in den Randbedingungen). (Ausführlicher [3], Seite 46—7, 4.11—4.14; $2p$ als Ordnung von $M[y]$ und $2q$ als Ordnung von $N[y]$ mit $p > q \geq 0$).

Das Maximum-Minimum-Prinzip ([1], [3], [10] Ziffer A, 10) sei in folgender Form dargestellt:

„Es sei ein linear unabhängiges integrierbares Funktionensystem w_r , $r = 1, 2, \dots, n - 1$ fest gewählt, und es werden alle Vergleichsfunktionen u orthogonal zu w_r , $r = 1, 2, \dots, n - 1$ betrachtet. Dann ist das Minimum des RAYLEIGHschen Quotienten oder seine untere Grenze höchstens gleich dem n -ten Eigenwert:

$$\underline{\text{fin}} (R[u]) \leq k_n \quad \text{mit} \quad \int_a^b u w_r dx = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n - 1 \quad \dots \dots (2).$$

Geeignete Auswahl des Funktionensystems w_r :

$$w_r \equiv N^*[y_r^*] \quad \text{mit} \quad N^*[y] \quad \dots \dots \dots (3)$$

einer mit ihren Eigenwerten k_s^* und normierten Eigenfunktionen y_s^* bekannten, benachbarten und den gleichen Voraussetzungen wie die gestellte Aufgabe (1) genügenden weiteren Aufgabe

$$M^*[y] = k^* N^*[y] \equiv k^* (-1)^q (g_q^* y^{(q)})^{(q)} \quad \text{mit} \quad g_q^* > 0, \quad U_i[y] = 0 \quad \dots \dots (4)$$

gleicher Ordnung ($2p$ sowie $2q$) und gleichen Randbedingungen wie zu Ziffer (1). Diese Randbedingungen (4) müssen jetzt die Bedingungen

$$y_a^{(s)} = y_b^{(s)} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, q - 1 \quad \dots \dots \dots (5)$$

enthalten, um für die benachbarte Aufgabe (4) den Entwicklungssatz ([3], [10] Ziffer A, 13) gesichert zu wissen.¹⁾

Festlegung der Abweichungen von der gestellten zur benachbarten Aufgabe:

$$M[y] = M^*[y] + M^4[y] \quad \dots \dots \dots (6)$$

mit $\int_a^b u M^4[u] dx \geq 0$ für alle zulässigen Vergleichsfunktionen u ,

$$N[y] = N^*[y] - N^4[y] \quad \dots \dots \dots (7).$$

Mit fest gewähltem Index n zum Eigenwert k_n sind alle Vergleichsfunktionen u „zulässige Vergleichsfunktionen“ im Sinne des Maximum-Minimum-Prinzips (2), wenn sie der Orthogonalitätsrelation

$$\int_a^b u N^*[y_r^*] dx = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n - 1 \quad \dots \dots \dots (8)$$

genügen.

Weiter wird vorausgesetzt:

$$R[y_n^*] < k_{n+1}^* \quad \dots \dots \dots (9).$$

Die Abweichung $N^4[y]$ (7) erfülle eine der beiden folgenden Voraussetzungsklassen:

Klasse I:

$$\int_a^b u N^4[u] dx \geq 0, \quad [u \text{ „zulässig“ entspr. Ziffer (8)}] \quad \dots \dots \dots (10).$$

Hierfür ist bei $N[y]$ nur zu einem Gliede hinreichend:

$$0 < g_q \equiv g_q^* - g_q^4 \quad \text{mit} \quad g_q^4 \geq 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b \quad \dots \dots (11).$$

¹⁾ Weiterreichende Voraussetzungen werden gegeben von W. DÜCK, Ein Entwicklungssatz bei selbstadj. und volldef. Eigenwertproblemen, ZAMM 39 (1959), S. 358—363.

Klasse II:

$$-\int_a^b v N^d[v] dx \geq 0 \quad \dots \quad (12),$$

[für alle jetzt „zulässigen Vergleichsfunktionen“ v zu $\int_a^b v N^*[y_r^*] dx = 0, r = 1, 2, \dots, n-1, n$].

Dazu kann die Voraussetzung (6) entsprechend durch $\int_a^b v M^d[v] dx \geq 0$ ersetzt werden. Weiterhin wird innerhalb dieser Klasse II gefordert:

$$-\int_a^b v N^d[v] dx \leq \frac{1-d}{d} \int_a^b v N^*[v] dx, \quad 0 < d < 1 \quad \text{mit} \quad d \cdot k_{n+1}^* > R[y_n^*] \quad (13)$$

und

$$\int_a^b v M^d[v] dx \geq R[y_n^*] \left(-\int_a^b v N^d[v] dx \right) \quad \dots \quad (14).$$

(Für die Voraussetzung (14) ist mit $\int_a^b v M^d[v] dx > 0$, $-\int_a^b v N^d[v] dx > 0$ und $R^+[v]$ einer geeignet gewählten Eigenwertaufgabe hinreichend:

$$\frac{\int_a^b v M^d[v] dx}{-\int_a^b v N^d[v] dx} \geq R^+[v] \geq R[y_n^*] \quad \dots \quad (15).$$

Folgerungen, wenn alle Voraussetzungen einschließlich derjenigen der Klasse I erfüllt sind:

$$R^*[u] \leq R[u] \quad \text{mit} \quad \int_a^b u N^*[y_r^*] dx = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n-1 \quad \dots \quad (16);$$

$$R^*[v] \leq R[v] \quad \text{mit} \quad \int_a^b v N^*[y_r^*] dx = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n-1, n \quad \dots \quad (17)$$

und weiter nach dem Vergleichungssatz ([10] Ziffer A, 11–12)

$$k_n^* \leq R[u], \quad R[y_n^*] < k_{n+1}^* \leq R[v] \quad \dots \quad (18).$$

Folgerungen, wenn alle Voraussetzungen einschließlich derjenigen der Klasse II erfüllt sind:

$$R[y_n^*] < R[v] \quad \dots \quad (19).$$

3. Eine Abschätzung des Rayleighschen Quotienten als untere Schranke für den n -ten Eigenwert

$$R[u] = \frac{\int_a^b u M[u] dx}{\int_a^b u N[u] dx} \quad \text{mit zulässigen Vergleichsfunktionen (8) in der Darstellung}$$

$$u = a_n y_n^* + v, \quad a_n = \int_a^b u N^*[y_n^*] dx \neq 0 \quad \dots \quad (20)$$

läßt sich im Bereich

$$0 < R[u] \leq R[y_n^*] \quad \dots \quad (21)$$

mit Hilfe des Entwicklungssatzes für

$$v \left(v/a_n = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{n+j} y_{n+j}^* \right),$$

der PARSEVALSchen Gleichung und der BESSELSchen Ungleichung auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} R[u] \int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx &\geq \int_a^b y_n^* M[y_n^*] dx + \sum_{j=1}^{\infty} 2 \beta_{n+j} \int_a^b y_{n+j}^* (M^d[y_n^*] + R[u] N^d[y_n^*]) dx \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} (k_{n+j}^* - R[u]) \beta_{n+j}^2 \quad \dots \quad (22). \end{aligned}$$

Definition einer Hilfsfunktion $S_n(R)$:

$$S_n(R) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\int_a^b y_{n+j}^* (M^A[y_n^*] + R N^A[y_n^*]) dx \right]^2}{k_{n+j}^* - R} \dots \dots \dots (23),$$

$R[u]$ als Veränderliche R im Intervall: $0 < R \leq Q < k_{n+1}^*$.

Eigenschaften dieser Hilfsfunktion:

1. $S_n(R)$ ist einschließend der gliedweise nach R gebildeten Ableitung gleichmäßig konvergent $\dots \dots \dots (24)$.
2. Mit den konvergenten Summen

$$S_{n,1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\int_a^b y_{n+1}^* M^A[y_n^*] dx \right]^2}{k_{n+1}^* - R[y_n^*]}, \quad S_{n,2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\int_a^b y_{n+j}^* N^A[y_n^*] dx \right]^2}{k_{n+j}^* - R[y_n^*]} \dots \dots \dots (25)$$

gilt die Abschätzung:

$$S_n(R) \leq 2 (S_{n,1} + R^2[y_n^*] S_{n,2}) \quad (0 < R \leq R[y_n^*]) \dots \dots \dots (26).$$

3. Bei der „Speziellen Eigenwertaufgabe“ $N[y] = g_0 y$ (1) gilt im Intervall $0 < R \leq Q < k_{n+1}^*$:

$$S_n(R) \leq F_n(R) = \frac{1}{k_{n+1}^* - R} \left[\int_a^b \frac{(M^A[y_n^*] + R g_0^A y_n^*)^2}{g_0^*} dx - \sum_{s=1}^n \left[\int_a^b y_s^* (M^A[y_n^*] + R g_0^A y_n^*) dx \right]^2 \right] \quad (27).$$

4. Bei der „Allgemeinen Eigenwertaufgabe“ (1) gilt im Intervall $0 < R \leq Q < k_{n+1}^*$:

$$S_n(R) \leq F_n(R) = \frac{k_{n+1}^*}{k_{n+1}^* - R} \left[\int_a^b w M^*[w] dx - \sum_{s=1}^n \frac{\left[\int_a^b y_s^* (M^A[y_n^*] + R N^A[y_n^*]) dx \right]^2}{k_s^*} \right] \quad (28)$$

mit w als der einzigen existierenden Lösung der Randwertaufgabe

$$M^*[w] = M^A[y_n^*] + R N^A[y_n^*], \quad U_i[w] = 0 \quad \dots \dots \dots (29).$$

Mit $S_n(R)$ (23) läßt sich jetzt die Ungleichung (22) umformen zu

$$R[u] \int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx \geq \int_a^b y_n^* M[y_n^*] dx - S_n(R) + \sum_{j=1}^{\infty} (k_{n+j}^* - R) \left[\beta_{n+j} + \frac{\int_a^b y_{n+j}^* (M^A[y_n^*] + R N^A[y_n^*]) dx}{k_{n+j}^* - R} \right]^2 \quad (30)$$

und führt bei Beachtung von $0 < R \leq R[y_n^*] < k_{n+1}^*$ (9) auf das Ergebnis:

$$R[u] \geq R[y_n^*] - \frac{S_n(R)}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx} \quad \dots \dots \dots (31),$$

$R = R[u]$ im Intervall $0 < R \leq R[y_n^*]$ oder $0 < P_n \leq R \leq R[y_n^*]$ mit P_n als einer irgendwie schon bekannten unteren Schranke für

$$\underline{\text{fin}} (R[u]), \quad \int_a^b u N^*[y_r^*] dx = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1).$$

Innerhalb der Dissertation ([10] Ziffer C, 39—43 a) werden nun verschiedene Verfahren angegeben, die rechte Seite der Ungleichung (31) jeweils durch eine feste Zahl K_n weiter abzuschätzen:

$$R[u] \geq R[y_n^*] - \frac{S_n(R)}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx} \geq K_n \quad \dots \dots \dots (32).$$

Nach dem Minimalprinzip von RAYLEIGH für den Index $n = 1$ und nach dem Maximum-Minimum-Prinzip von COURANT für Indizes $n > 1$ ist K_n (32) eine untere Schranke für den n -ten Eigenwert:

$$k_n \geq \underline{\text{fin}} (R[u]) \geq K_n, \quad \int_a^b u N^*[y_r^*] dx = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1) \quad (33).$$

4. Ergebnis

Zur Eigenwertaufgabe (1) sei eine benachbarte Aufgabe (3—5) $M^*[y] = k^* (-1)^q [g_q^* y^{(q)}]^{(q)}$, $U_i[y] = 0$ ($g_q^* > 0$) gleicher Ordnung ($2p$ sowie $2q$) und gleichen Randbedingungen ausgewählt. Bei Kenntnis der Eigenwerte k_i^* und normierten Eigenfunktionen y_i^* in gewissem Umfang müssen die Abweichungen zwischen gestellter und benachbarter Aufgabe folgenden Bedingungen genügen:

$$M[y] = M^*[y] + M^d[y] \quad \text{mit} \quad \int_a^b u M^d[u] dx \geq 0, \quad \int_a^b u N^*[y_r^*] dx = 0 \\ (r = 1, 2, \dots, n-1)$$

und $N[y] = N^*[y] - N^d[y]$ bei Erfüllung einer der Voraussetzungsklassen I oder II für $N^d[y]$ (10—11, 12—15).

Enthalten die Randbedingungen der Eigenwertaufgabe (1) die Bedingungen: $y_a^{(s)} = y_b^{(s)} = 0$, $s = 0, 1, 2, \dots, q-1$ und ist $R[y_n^*] < k_{n+1}^*$ erfüllt, so bestehen folgende Möglichkeiten zur Abschätzung des n -ten Eigenwertes nach unten:

$$a) \quad k_n \geq R[y_n^*] - \frac{\text{Max} (S_n(R))}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx}, \quad (0 < P_n \leq R \leq R[y_n^*] \quad \text{oder} \quad 0 < R \leq R[y_n^*]).$$

b) $k_n \geq R_{\min}$, R_{\min} als die kleinste Lösung der Gleichung

$$R = R[y_n^*] - \frac{S_n(R)}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx} \quad \text{im Intervall} \quad 0 < P_n \leq R \leq R[y_n^*].$$

Voraussetzung: $\left[R[y_n^*] - \frac{S_n(P_n)}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx} \right] > P_n.$

$$c) \quad k_n \geq \text{Min} \left[R, R[y_n^*] - \frac{S_n(R)}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx} \right], \quad R \text{ jeweils fest herausgegriffen im Intervall} \\ 0 < P_n \leq R \leq R[y_n^*].$$

Voraussetzung: $\left[R[y_n^*] - \frac{S_n(R)}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx} \right]$ ist monoton fallend in $0 < P_n \leq R \leq R[y_n^*]$, wofür beispielsweise $M^d[y] \equiv 0$ oder $N^d[y] \equiv 0$ hinreichend ist.

d) $k_n \geq R_{\min}$, R_{\min} als die kleinste Lösung der quadratischen Gleichung:

$$R = R[y_n^*] - \frac{F_n(R)}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx} \quad \text{für} \quad 0 < P_n \leq R \leq R[y_n^*].$$

Voraussetzung: $\left[R[y_n^*] - \frac{F_n(P_n)}{\int_a^b y_n^* N[y_n^*] dx} \right] > P_n.$

Darstellung von $S_n(R)$, $F_n(R)$ und Abschätzung von $S_n(R)$ unter den Ziffern (23—29). Die Schranke P_n kann innerhalb der Voraussetzungsklasse I (10—11) zu k_n^* genommen werden.

5. Obere Schranken für den n -ten Eigenwert

Zur Gewinnung oberer Schranken wird das RITZ-GALERKINSche Verfahren empfohlen. Macht man einen Ansatz mit den normierten Eigenfunktionen der benachbarten Aufgabe (3—5)

$$u = \sum_{r=1}^l a_r y_r^*,$$

so gilt:

$$\left. \begin{aligned} m_{rs} &= \int_a^b y_r^* M[y_s^*] dx = \int_a^b y_r^* M^A[y_s^*] dx, & (r \neq s), \\ n_{rs} &= \int_a^b y_r^* N[y_s^*] dx = - \int_a^b y_r^* N^A[y_s^*] dx, & (r \neq s), \\ m_{rr} &= \int_a^b y_r^* M[y_r^*] dx = k_r^* + \int_a^b y_r^* M^A[y_r^*] dx, \\ n_{rr} &= \int_a^b y_r^* N[y_r^*] dx = 1 - \int_a^b y_r^* N^A[y_r^*] dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34).$$

Innerhalb der Eingliedklasse läßt sich auch mit Hilfe der GREENSchen Funktion von guten unteren Schranken auf entsprechende obere Schranken schließen ([10] Ziffer F, 96—98).

6. Beispiele

[Obere Schranken nach RITZ-GALERKIN, die Fehler in Prozenten beziehen sich auf den Mittelwert des Einschließungsintervalles]

I) $-y'' = k(2 + \cos x)y$, $y_0 = y_\pi = 0$; Schranken zu k_1 ?

$-y'' = k(3 - [1 - \cos x])y$ führt auf die benachbarte Aufgabe:

$$-y'' = k^* 3y, \quad y_0 = y_\pi = 0; \quad M^A[y] \equiv 0, \quad g_0^A = 1 - \cos x \geq 0$$

innerhalb der Voraussetzungs-kategorie I (Bild 1).

$$k_s^* = s^2/3, \quad y_s^* = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \sin(sx), \quad R[y_s^*] = s^2/2.$$

$R[y_n^*] < k_{n+1}^*$ führt auf $n^2/2 < (n+1)^2/3$. $S_1(R)$ nimmt mit $\int_0^\pi y_{1+j}^* g_0^A y_1^* dx = 0$, ($j > 1$) folgende Gestalt an:

$$S_1(R) = \frac{R^2}{12(4 - 3R)}.$$

Mit $P_1 = k_1^* = 1/3$ erhält man eine erste Abschätzung:

$$k_1 \geq 1/2 - \frac{\text{Max}(S_1(R))}{1 - 1/3}, \quad 1/3 \leq R \leq 1/2 \quad (\text{s. 4, a})$$

$$\underline{0,4875 \leq k_1 \leq 0,4901}, \quad \pm 0,27\%.$$

Eine zweite Abschätzung mit der kleinsten Lösung der Gleichung

$$R = 1/2 - \frac{S_1(R)}{1 - 1/3} \quad \text{oder} \quad 23R^2 - 44R + 16 = 0 \quad (\text{s. 4, b})$$

führt auf das bessere Ergebnis:

$$\underline{0,4882 \leq k_1 \leq 0,4901}, \quad \pm 0,21\%.$$

Bei einem anderen Vergleichsproblem ([3] S. 427)

$$-y'' = k^* g_0^* y, \quad y_0 = y_\pi = 0 \quad \text{mit} \quad g_0^* = \frac{3c^4}{(x^2 + c^2)^2}, \quad c^2 = \pi^2 \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

wird die Funktion g_0 besser angenähert (Bild 2):

$$0 < 2 + \cos x \equiv g_0^* - g_0^A \quad \text{mit} \quad g_0^A \geq 0$$

innerhalb der Voraussetzungs-kategorie I.

$$k_s^* = \frac{1}{3c^4} \left[-c^2 + \left(\frac{cs\pi}{\arctg \pi/c} \right)^2 \right],$$

$$y_s^* = \frac{1}{c^2 \sqrt{3}} \sqrt{\frac{2c}{\arctg \pi/c}} \sqrt{(c^2 + x^2)} \sin \left[s\pi \frac{\arctg x/c}{\arctg \pi/c} \right].$$

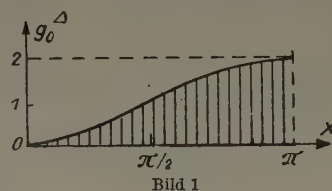


Bild 1

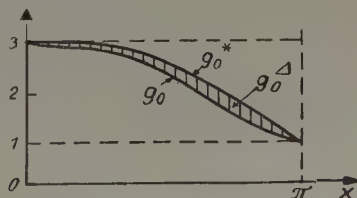


Bild 2

Eine Abschätzung

$$k_1 \geq R[y_1^*] - \frac{\text{Max}(S_1(R))}{\int_0^{\pi} y_1^{*2} g_0 dx} \quad (\text{s. 4, a})$$

führt jetzt bei erheblichem Mehraufwand an Rechenarbeit (infolge tabellarischer Integrationen) auf das Ergebnis:

$$0,4900 \leq k_1 \leq 0,4901, \quad \pm 0,01\%.$$

$$\text{II) } [(1+x^4)y'']' - A y'' = k(-y'' + x^2 y), \quad y_0 = y_0'' = y_1 = y_1' = 0 \quad (A > 0)$$

$$y^{\text{IV}} + (x^4 y'')'' - A y'' = k(-y'' - (-x^2 y))$$

führt auf die benachbarte Aufgabe:

$$y^{\text{IV}} = -k^* y'', \quad y_0 = y_0'' = y_1 = y_1' = 0; \quad M^A[y] = (x^4 y'')'' - A y''$$

mit

$$\int_a^b u M^A[u] dx = \int_0^1 [x^4 u'^2 + A u^2] dx > 0$$

und

$$N^A[y] = -x^2 y$$

mit

$$-\int_a^b v N^A[v] dx = \int_0^1 x^2 v^2 dx > 0$$

innerhalb der Voraussetzungs-kategorie II. [Die Voraussetzungs-kategorie II ist bei $N[y]$ zu mehreren Gliedern durchweg leichter zu erfüllen als die Voraussetzungs-kategorie I].

$$k_s^* = (s\pi)^2, \quad y_s^* = \frac{\sqrt{2}}{s\pi} \sin(s\pi x) \quad \text{und} \quad R[y_s^*] \leq 1,2 (s\pi)^2 + A.$$

Die Forderung (15) der Voraussetzungs-kategorie II

$$\frac{\int_a^b v M^A[v] dx}{-\int_a^b v N^A[v] dx} = \frac{A \int_0^1 v(-v'') dx}{\int_0^1 x^2 v^2 dx} \geq A \frac{\int_0^1 v(-v'') dx}{\int_0^1 v^2 dx} = A R^+[v] \geq R[y_n^*],$$

($\int_0^1 v(-y_s^{*''}) dx = 0$ ist gleichbedeutend mit $\int_0^1 v \sin(r\pi x) dx = 0$) wird mit der geeigneten Eigenwertaufgabe $-v'' = k^+ v$, $v_0 = v_1 = 0$ und $k_s^+ = (s\pi)^2$ in der Form $A[(n+1)\pi]^2 \geq R[y_n^*]$ sicherlich für alle Werte $A \geq 1,2$ erfüllt. Mit $A = 4$ und dem gleichen $R^+[v]$ läßt sich die Forderung (13) der Voraussetzungs-kategorie II etwa für die Indizes $n = 1, 2, 3$ entsprechend nachweisen:

$$-\int_a^b v N^A[v] dx \leq \frac{1-d}{d} \int_a^b v N^*[v] dx, \quad \frac{1-d}{d} \geq 3/7$$

oder

$$\frac{\int_a^b v N^*[v] dx}{-\int_a^b v N^A[v] dx} = \frac{\int_0^1 v(-v'') dx}{\int_0^1 x^2 v^2 dx} \geq \frac{\int_0^1 v(-v'') dx}{\int_0^1 v^2 dx} \geq 7/3$$

ist erfüllt zu $\pi^2 > 7/3$. $R[y_n^*] < k_{n+1}^*$ besteht für alle Indizes $n \leq 10$. Mit

$$S_n(R) = 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_{n+j}^* - R} \left[2n(n+j) \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(2n+j)^2} - \frac{6}{j^4 \pi^2} + \frac{6}{(2n+j)^4 \pi^2} \right) - \frac{R}{(n+j)n\pi^4} \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(2n+j)^2} \right) \right]^2$$

ist

$$R[y_n^*] = \frac{S_n(R)}{\int_0^1 y_n^* N[y_n^*] dx}$$

monoton fallend in $0 < R \leq R[y_n^*]$, und man kann mit fest herausgegriffenen Werten $R = 1,465 \pi^2$ und $R = 1,22(2\pi)^2$ abschätzen (s. 4, c):

$$1,4525 \pi^2 \leq k_1 \leq 1,4641 \pi^2, \quad \pm 0,4\%,$$

$$1,213 (2\pi)^2 \leq k_2 \leq 1,270 (2\pi)^2, \quad \pm 2,3\%.$$

III) Die Ergebnisse weiterer Beispiele ([10]. H—J):

Aufgabe: $-(1+x)y' = k(1+x)y, \quad y'_0 = y_1 = 0.$

Benachbarte Aufgabe: $-y'' = k^* 2y, \quad y'_0 = y_1 = 0.$

Abweichungen: $M^A[y] = -(xy')', \quad g_0^A = 1 - x \geq 0. \quad (V. I, 11)$

Ergebnisse: $3,199 \leq k_1 \leq 3,220 \pm 0,33\%, \quad 22,50 \leq k_2 \leq 23,16 \pm 1,5\%.$

Aufgabe: $[(1+ax)y'']' = -ky'', \quad y_0 = y_1 = y'_0 = y'_1 = 0 \quad (a > 0).$

Benachbarte Aufgabe: $y^{IV} = -k^* y'', \quad y_0 = y_1 = y'_0 = y'_1 = 0.$

Abweichungen: $M^A[y] = a(xy'')'', \quad N^A[y] = 0.$

Ergebnisse für k_1 in Abhängigkeit von a , nur bei Kenntnis von y_1^*, k_1^* und k_2^* (s. 4, d):

$$a = 0,2 \quad 42,92 \leq k_1 \leq 43,43 \pm 0,6\%,$$

$$a = 0,4 \quad 45,15 \leq k_1 \leq 47,38 \pm 2,5\%,$$

$$a = 0,6 \quad 45,6 \leq k_1 \leq 51,4 \pm 6,0\%.$$

Aufgabe: $[(4+x^2)''']' = k(1+x)y, \quad y_0 = y''_0 = y_1 = y''_1 = 0.$

Benachbarte Aufgabe: $16y^{IV} = k^* 2y, \quad y_0 = y''_0 = y_1 = y''_1 = 0.$

Abweichungen: $M^A[y] = [(8x^2 + x^4)y'']', \quad g_0^A = 1 - x \geq 0. \quad (V. I, 11)$

Ergebnisse: $8(n\pi)^4 \cdot : \quad 1,52434 \leq k_1 \leq 1,52616 \pm 0,06\%,$

$$1,5566 \leq k_2 \leq 1,5764 \pm 0,64\%,$$

$$1,562 \leq k_3 \leq 1,584 \pm 0,70\%.$$

Literatur

- [1] R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathem. Physik (1931), I.
- [2] E. KAMKE, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen (1944) I.
- [3] L. COLLATZ, Eigenwertaufgaben mit Techn. Anwendungen (1949).
- [4] L. COLLATZ, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Aufl., (1955).
- [5] R. ZURMÜHL, Praktische Mathematik für Ingenieure u. Physiker, 2. Aufl. (1957).
- [6] K. KNOPP, Theorie u. Anwendungen der unendlichen Reihen, 4. Aufl. (1947).
- [7] J. SCHRÖDER, „Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines HILBERTschen Raumes“, Mathem. Nachr. 10, 1953, S. 113—128. „Fehlerabschätzung zur Störungsrechnung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen“, ZAMM 34 (1954), S. 140—149.
- [8] G. BERTRAM, „Zur Fehlerabschätzung für das RITZsche Verfahren bei Eigenwertproblemen“, Diss. 56 S. Hannover 1950; ein weiterer Bericht: ZAMM 37 (1957), S. 191—201.
- [9] N. J. LEHMANN, „Beiträge zur numerischen Lösung linearer Eigenwertprobleme“, ZAMM 39 (1949), S. 341—356; ein weiterer Bericht ZAMM 40 (1950), S. 1—16.
- [10] W. BOLLERMANN, „Zur Einschließung von Eigenwerten unter Verwendung des Maximum-Minimum-Prinzips“, Diss. Hannover 1958.

Manuskripteingang: 16. 7. 1959

Anschrift: Dr. W. BOLLERMANN, Hannover-Kirchrode, Rutenbergstr. 24

Nomographic Representation of the Functional Relations among Three Complex Variables

By K. MORITA and Y. SIMOKAWA

Es wird eine Massausche komplexe Darstellungsmatrix M_3^c dritter Ordnung definiert und gezeigt, daß die Funktionalgleichung $\det(M_3^c) = 0$, welche drei komplexe Variablen z_j ($j = 1, 2, 3$) enthält, durch die genannte Darstellung in der komplexen Ebene ausgedrückt wird, sowie daß die Unbekannte unter den z_j pantographisch oder durch eine elementare geometrische Konstruktion bestimmt werden kann.

We define a Massau's complex chart matrix M_3^c of the third order and show that the functional equation $\det(M_3^c) = 0$, including three complex variables z_j ($j = 1, 2, 3$), is expressed by our complex chart in Gaussian plane, and that an unknown number, one of z 's, is obtained by a pantograph or an elementary geometrical construction. Some example of these charts are also explained.

Дается определение комплексной диаграммы-матрицы Массо M_3^c третьего порядка и показывается, что функциональное уравнение $\det(M_3^c) = 0$ содержащее три комплексных переменных z_j ($j = 1, 2, 3$), в Гаусовой плоскости комплексного переменного выражается при помощи нашей комплексной диаграммы и, что некоторое неизвестное число — одно из наших z — получается при помощи эвиформного или элементарногеометрического построения. Кроме того даются пояснения некоторых примеров таких диаграмм.

Many researches on the nomographic representation of the analytic functions of one complex variable have been studied by I. A. VILLNER in various Russian journals [1] and F. REUTTER in this one [2].

We show here a method of nomographing the functional relations among three complex variables, if they are expressed by the forms

$$(\text{MASSAU's complex chart determinant}) = 0,$$

where MASSAU's complex chart matrix and determinant are explained in the following section.

1. Complex Chart Matrix of the Functional Relations among Three Complex Variables

We consider a square matrix of the third order of the form

$$M_3^c = \begin{vmatrix} p_{11}(z_1) & p_{12}(z_2) & p_{13}(z_3) \\ p_{21}(z_1) & p_{22}(z_2) & p_{23}(z_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1),$$

where $z_k = x_k + i y_k$, $i^2 = -1$, $k = 1, 2, 3$, and p_{1j} , p_{2j} are the analytic functions of z_j , ($j = 1, 2, 3$), over an open region R .

Now we consider the following conditions:

- 1°. Vectors $(p_{1j}, p_{2j}, 1)$, ($j = 1, 2, 3$) are not constants, respectively.
- 2°. Vectors $(p_{1j}, p_{2j}, 1)$, ($j = 1, 2, 3$) are linearly dependent.

When the elements of the matrix M_3^c satisfy the above conditions, we call M_3^c a MASSAU's complex chart matrix of the third order, and from the condition 2° we have

$$\det(M_3^c) = 0 \quad (2).$$

$\det(M_3^c)$ is called MASSAU's complex chart determinant of the third order or a complex nomographic function, and the above equation may be called a key equation (Schlüsselgleichung) or a type equation for the general three complex variable chart; and if, inversely, we have a functional relation $F(z_1, z_2, z_3) = 0$, and it be represented by $\det(M_3^c) = 0$, we will show that the matrix M_3^c represents a three variable complex chart in the following section.

2. General Key Equation, Method of Nomographic Solution and the Special Cases of the Complex Chart

If we rewrite the expression (2) as

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_2) & f_3(z_3) \\ g_1(z_1) & g_2(z_2) & g_3(z_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3),$$

according to the well-known theorem in the elementary theory of functions of a complex variable, the above relation shows that the two corresponding triangles $\triangle P_1 P_2 P_3$ and $\triangle Q_1 Q_2 Q_3$ are

similar, (Fig. 1), where vertices of them are represented, respectively, by $\{f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3)\}$ and $\{g_1(z_1), g_2(z_2), g_3(z_3)\}$ in the GAUSSIAN complex plane; and they are written by

$$\begin{aligned} w_j &= f_j(z_j) = f_j(x_j + i y_j) = u_j(x_j, y_j) + i v_j(x_j, y_j), \\ w_j^* &= g_j(z_j) = g_j(x_j + i y_j) = u_j^*(x_j, y_j) + i v_j^*(x_j, y_j), \quad (i^2 = -1), \end{aligned}$$

and the three vertices of $\triangle P_1P_2P_3$ are shown by the intersections of respective curves of the curvilinear nets $u_j = u_j(x_j, y_j)$, $v_j = v_j(x_j, y_j)$, respectively; and the ones of $\triangle Q_1Q_2Q_3$ are the similar intersections of $u_j^* = u_j^*(x_j, y_j)$, $v_j^* = v_j^*(x_j, y_j)$, respectively.

Method of solution

If a given functional relation of three complex variables $F(z_1, z_2, z_3) = 0$ be represented by the expression (3), we have two pairs of figures, that is, the first partial chart and the second partial chart, in which three families of curvilinear nets are contained, respectively, as in Fig. 1.

When z_1 and z_2 are given and z_3 is unknown, we obtain the two pairs of two points $(P_1, P_2), (Q_1, Q_2)$, and can get the third unknown quantity $z_3 (= x_3 + i y_3)$ by a procedure in which $\triangle P_1P_2P_3$ is similar to $\triangle Q_1Q_2Q_3$ and the two pairs of corresponding indices $(x_3), (x_3^*)$ and $(y_3), (y_3^*)$ are the same, respectively.

The procedure of this nomographic solution is done by a construction of elementary geometry or a moderate use of pantograph.

When using a pantograph, if the values of z_1 and z_2 are given, we may find the required value of z_3 by the next procedure indicated in Fig. 2: we put a point $Q_1(z_1)$ of the first partial chart drawn on the tracing paper upon a point $P_1(z_1)$ of the second partial chart on the stationary paper, and again superpose a straight line Q_1Q_2 , ($Q_2 \equiv Q_2(z_2)$), drawn on the tracing paper, on a straight line P_1P_2 , ($P_2 \equiv P_2(z_2)$), drawn on the stationary paper, and, furthermore, we set a center of a pantograph on the point $P_1 \equiv Q_1$, keeping a ratio Q_1Q_2/P_1P_2 constant, and then we can obtain two points P_3 (on the stationary paper) and Q_3 (on the tracing paper), which are collinear in regard to C , and of which indices x_3, y_3 are the same, respectively, and the value $x_3 + i y_3 \equiv z_3$ is the required third quantity.

Relations of our complex charts with solid nomograms

If, especially, every element of the first or second row of the left hand determinant of expression (3) is real functions, for example, if

$$f_j(z_j) = f_j(x_j + i y_j) = u_j(x_j, y_j); \quad (j = 1, 2, 3),$$

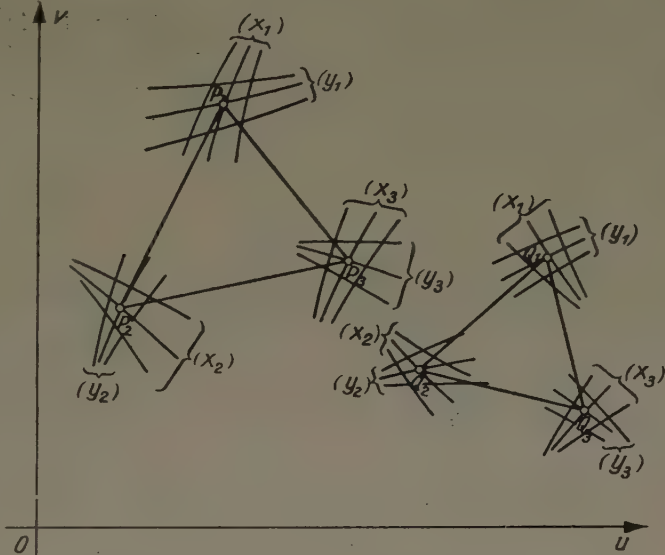


Fig. 1. $\triangle P_1P_2P_3$ is similar to $\triangle Q_1Q_2Q_3$ in GAUSSIAN complex plane uOv

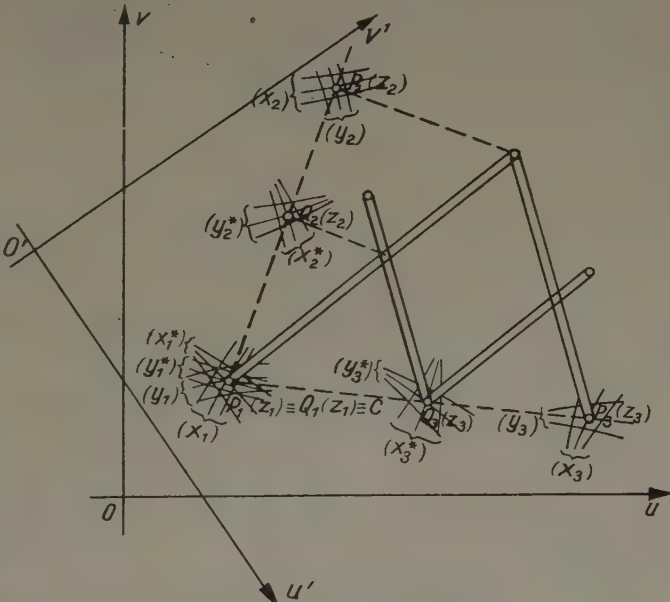


Fig. 2. Method of use of a pantograph

the expression becomes

$$\begin{vmatrix} u_1(x_1, y_1) & u_2(x_2, y_2) & u_3(x_3, y_3) \\ u_1^*(x_1, y_1) + i v_1^*(x_1, y_1) & u_2^*(x_2, y_2) + i v_2^*(x_2, y_2) & u_3^*(x_3, y_3) + i v_3^*(x_3, y_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4).$$

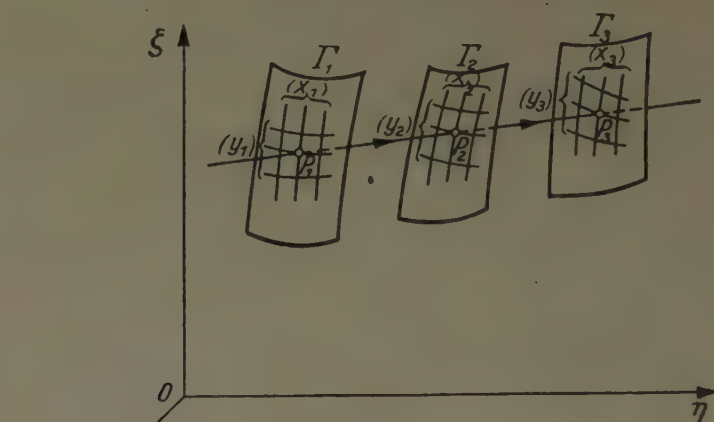


Fig. 3. An idea of solid nomograms shown by T. WAKABAYASHI and T. KANAMARU

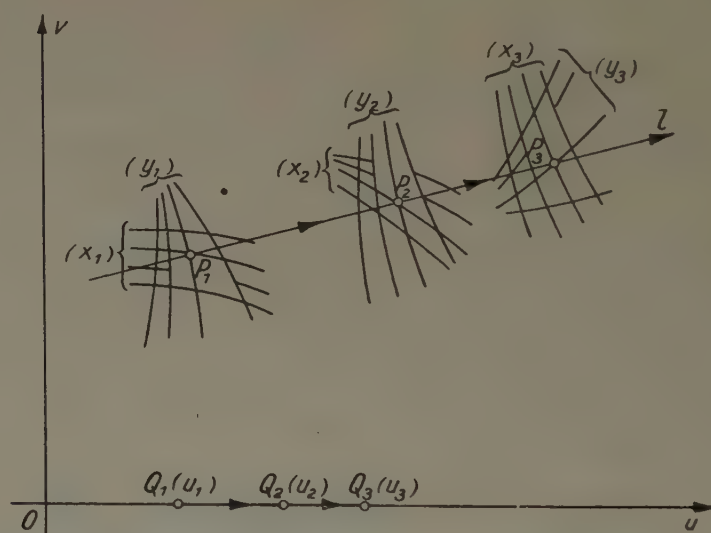


Fig. 4. $\overline{P_1 P_2} : \overline{P_2 P_3} = \overline{Q_1 Q_2} : \overline{Q_2 Q_3}$, and the indices (x_j, y_j) of P_j and Q_j are the same, respectively

Hence

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1^* & u_2^* & u_3^* \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + i \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1^* & v_2^* & v_3^* \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

and we have

$$\begin{vmatrix} u_1(x_1, y_1) & u_2(x_2, y_2) & u_3(x_3, y_3) \\ u_1^*(x_1, y_1) & u_2^*(x_2, y_2) & u_3^*(x_3, y_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} u_1(x_1, y_1) & u_2(x_2, y_2) & u_3(x_3, y_3) \\ v_1^*(x_1, y_1) & v_2^*(x_2, y_2) & v_3^*(x_3, y_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5).$$

These two expressions are nothing but a condition that the three points $P_j(x_j, y_j)$, ($j = 1, 2, 3$), on the respective three curvilinear surfaces Γ_j : $\xi_j = u_j(x_j, y_j)$, $\eta_j = u_j^*(x_j, y_j)$, $\zeta_j = v_j^*(x_j, y_j)$, ($j = 1, 2, 3$), in R_3 , are collinear, and therefore, this special case of our complex chart is a space nomogram, which was studied, in the name of solid nomogram, by T. WAKABAYASHI and T. KANAMARU [3]. (See Fig. 3.)

In our case, expression (4) is shown, nomographically, as in Fig. 4, where the first partial chart (upper figure) is represented by the three curvilinear nets $u_j^* = u_j^*(x_j, y_j)$, $v_j^* = v_j^*(x_j, y_j)$,

($j = 1, 2, 3$), and the second partial chart by the three points $Q_1(u_1)$, $Q_2(u_2)$ and $Q_3(u_3)$ on the u -axis, which are, respectively, obtained by the expressions $u_j = u_j(x_j, y_j)$, ($j = 1, 2, 3$), by numerical calculation or suitable nomograms.

When $z_j (= x_j + i y_j)$, ($j = 1, 2$), are known and z_3 is unknown, we can easily find P_1 , P_2 in the first partial chart and Q_1 , Q_2 in the second partial chart, and when we join P_1 and P_2 and get a straight line l , we find a moderate point P_3 on l and Q_3 on the u -axis, so that the ratio of $P_1P_2:P_2P_3$ is equal to the one of $Q_1Q_2:Q_2Q_3$.

If, by trial and error, we obtain P_3 and Q_3 , of which indices (x_3, y_3) are the same, respectively, the indices themselves are the real part and imaginary part of the required unknown quantity z_3 .

Expression (4) is also represented, nomographically, as follows:

From the first expression of (5), we have three curvilinear nets $X_j = u_j(x_j, y_j)$, $Y_j = u_j^*(x_j, y_j)$, ($j = 1, 2, 3$), for the first partial chart, and from the second, $X_j = u_j(x_j, y_j)$, $Y_j = v_j^*(x_j, y_j)$, ($j = 1, 2, 3$), for the second partial chart on the cartesian plane $X O Y$.

As the indices (x_j, y_j) of P_j and Q_j must be the same, respectively, we see, from our scale equations, that the three straight lines P_1Q_1 , P_2Q_2 and P_3Q_3 are all parallel to the y -axis, and hence we may obtain the adequate points P_3 on l and Q_3 on l' , so that the indices (x_3, y_3) of the both points have the same values, respectively (Fig. 5).

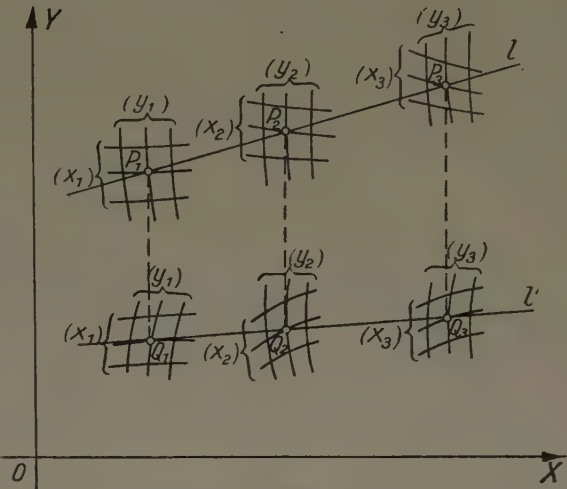


Fig. 5. $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \parallel P_3Q_3 \parallel (y\text{-axis})$, and also $P_2Q_3 \parallel (y\text{-axis})$, so that the indices (x_3, y_3) of P_3 and Q_3 are the same, respectively

Relation of the complex chart with the ordinary planar nomograms

Furthermore, if, especially, $f_j(z_j)$, $g_j(z_j)$, ($j = 1, 2, 3$), of the expression (3) be all real functions, that is, if

$$\begin{aligned} f_j(z_j) &= f_j(x_j + i y_j) = u_j(x_j, y_j), \\ g_j(z_j) &= g_j(x_j + i y_j) = u_j^*(x_j, y_j), \quad (j = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

expression (3) becomes

$$\begin{vmatrix} u_1(x_1, y_1) & u_2(x_2, y_2) & u_3(x_3, y_3) \\ u_1^*(x_1, y_1) & u_2^*(x_2, y_2) & u_3^*(x_3, y_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots (6),$$

and this expression shows a type equation of the planar mixed chart of six variables (x_j, y_j) , ($j = 1, 2, 3$), [4].

3. Affine Transformation of the Complex Chart

Given the complex chart matrix M_3^c , we operate a matrix

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (\det(A) \neq 0) \quad \dots \dots \dots (7),$$

where every element a_{ij} is a complex number, on the left hand of M_3^c as follows:

$$\begin{aligned} A M_3^c &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} p_{11} + a_{12} p_{21} + a_{13} & a_{11} p_{12} + a_{12} p_{22} + a_{13} & a_{11} p_{13} + a_{12} p_{23} + a_{13} \\ a_{21} p_{11} + a_{22} p_{21} + a_{23} & a_{21} p_{12} + a_{22} p_{22} + a_{23} & a_{21} p_{13} + a_{22} p_{23} + a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{M}_3^c \quad (8), \end{aligned}$$

and we call the matrix A a complex affine transformation matrix and \overline{M}_3^c of (8) transformed complex chart matrix.

As $\det (M_3^0) = 0$, (from expr. (2)), we have, from the above expression, $\det (\overline{M}_3^0) = 0$, and this fact shows that, by an affine transformation, a complex chart on a GAUSSIAN plane is transformed into another complex chart on the same plane or another, keeping the similarity of two triangles of solution invariant; and, according to this property, by an adequate affine transformation, we may have another new chart, which is convenient for use.

4. Some Type Equations of the Complex Charts

4.1. Type equation

$$\frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{f_1 + f_3}{g_1 + g_3} \dots \dots \dots (9).$$

The corresponding chart matrix is

$$\begin{vmatrix} -m f_1(z_1) & m f_2(z_2) & m f_3(z_3) \\ -n g_1(z_1) & n g_2(z_2) & n g_3(z_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (9'),$$

where m and n are the chart factors, and the skeleton of the corresponding complex chart is as similar as Fig. 1.

Example

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1^2 + z_2^2} = \frac{z_1 + z_3}{z_1^2 + z_3^2} \dots \dots \dots (10).$$

If we put $f_i \equiv z_i$, $g_i \equiv z_i^2$, ($i = 1, 2, 3$), in the expression (9), we have the above expression (10), and from (9') its chart matrix is

$$\begin{vmatrix} p_{11}(z_1) & p_{12}(z_2) & p_{13}(z_3) \\ p_{21}(z_1) & p_{22}(z_2) & p_{23}(z_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m z_1 & m z_2 & m z_3 \\ -n z_1^2 & n z_2^2 & n z_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

where $m = \alpha + i \beta$, $n = \gamma + i \delta$.

For the first partial chart, from the first row of the above matrix, we have

$$\begin{aligned} p_{11}(z_1) &= p_{11}(x_1 + i y_1) = u_1(x_1, y_1) + i v_1(x_1, y_1) = -m z_1 = -(\alpha + i \beta)(x_1 + i y_1) \\ &= -(\alpha x_1 - \beta y_1) - i(\beta x_1 + \alpha y_1), \end{aligned}$$

$$\therefore u_1(x_1, y_1) = -(\alpha x_1 - \beta y_1), \quad v_1(x_1, y_1) = -(\beta x_1 + \alpha y_1),$$

or

$$\alpha u_1 + \beta v_1 = -(\alpha^2 + \beta^2) x_1, \quad \beta u_1 - \alpha v_1 = (\alpha^2 + \beta^2) y_1 \dots \dots \dots (11),$$

similarly, we have

$$\alpha u_j + \beta v_j = (\alpha^2 + \beta^2) x_j, \quad \beta u_j - \alpha v_j = -(\alpha^2 + \beta^2) y_j \quad (j = 2, 3) \dots \dots (12),$$

especially, if we put $\alpha = 1$, $\beta = 1$, we have

$$u_1 + v_1 = -2 x_1, \quad u_1 - v_1 = 2 y_1 \dots \dots \dots (11');$$

$$u_j + v_j = 2 x_j, \quad u_j - v_j = -2 y_j, \quad (j = 2, 3) \dots \dots \dots (12'),$$

and these expressions represent the parallel straight lines, which are orthogonal each other, on the GAUSSIAN plane $u O v$, and having the indices (x_k, y_k) , ($k = 1, 2, 3$), respectively.

Similarly, for the second partial chart, we obtain, from the second row of the matrix,

$$u_1 = \frac{v_1^2}{4 x_1^2} - x_1^2, \quad u_1 = -\frac{v_1^2}{4 y_1^2} + y_1^2 \dots \dots \dots (13),$$

and

$$u_j = -\frac{v_j^2}{4 x_j^2} + x_j^2, \quad u_j = \frac{v_j^2}{4 y_j^2} - y_j^2, \quad (j = 2, 3) \dots \dots \dots (14),$$

where

$$\gamma = 1, \delta = 0.$$

Expressions (13) and (14) show the families of parabolas, on the GAUSSIAN plane $u O v$, and having the indices (x_k, y_k) , ($k = 1, 2, 3$), on them, respectively.

Whence our nomographic solution of the given equation (10) is easily done by the method of using a pantograph¹⁾, explained in the method of solution in the section 2 and Fig. 2. (See Fig. 6)²⁾.

An original chart of Fig. 6 has been constructed fully in a rectangle section paper of 900 mm \times 600 mm, and the intervals and pitches of the variables of the original chart are as follows:

for $x_1, y_j: 0(0,1) 7,0$; for $x_j, y_1: 0(0,1) 7,0$, ($j = 2$ or 3).

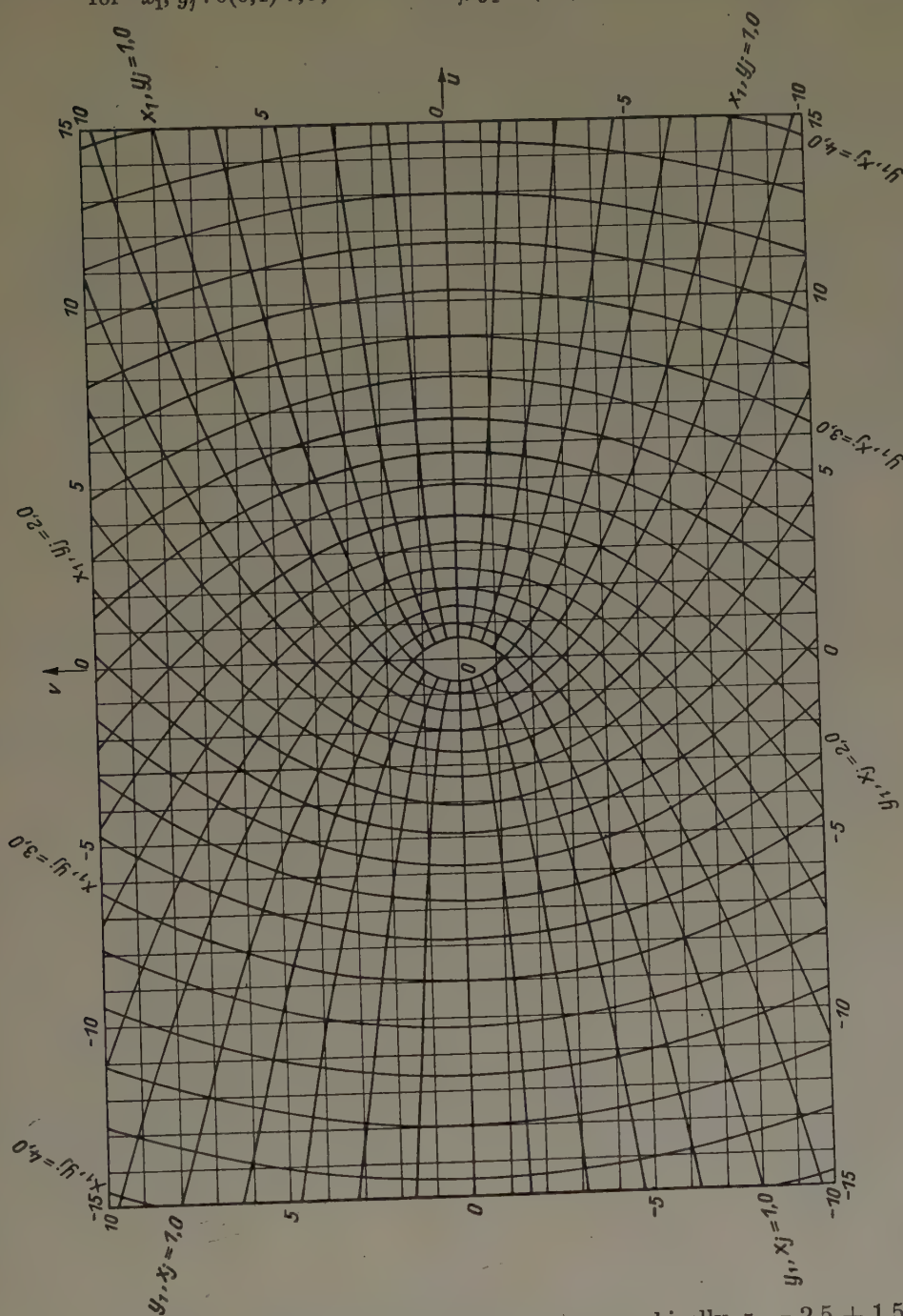


Fig. 6. The second partial chart, which is drawn on the stationary paper, of nomographic solution of

$$z_1 + z_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_1^2 + z_2^2}, \quad (z_j = x_j + i y_j; \quad i^2 = -1; \quad j = 2, 3)$$

As a practical example we have obtained nomographically $z_1 = 2,5 + 1,505 i$ for the exact solution $z_1 = 2,5 + 1,5 i$, when the given values are $z_2 = -1,5 + 0,5 i$ and $z_3 = 5,1 - 1,7 i$; and also $z_1 = 1,1 - 2,67 i$ nomographically for the exact solution $z_1 = 1,1 - 2,7 i$ for the same given values of z_2 and z_3 , and we may see that the both required z 's have a very good degree of precision.

¹⁾ We used the Coradi's 600 mm pantograph.

²⁾ Fig. 6 shows the second partial chart only, and the transparent first partial chart, which consists of Cartesian rectangular coordinates net, is omitted.

4.2. Type equation

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3} \dots \dots \dots (15).$$

The corresponding chart matrix is

$$\begin{vmatrix} m f_1 & m f_2 & m f_3 \\ n f_1^2 & n f_2^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (15'),$$

and the skeleton of the matrix is shown in Fig. 7.

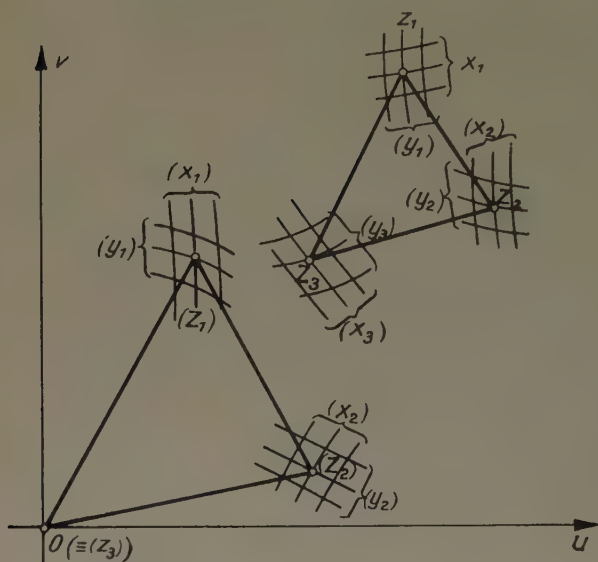


Fig. 7. Skeleton of the complex chart of Type (15), $(\Delta Z_1 Z_2 Z_3 \sim \Delta(Z_1)(Z_2)(Z_3))$

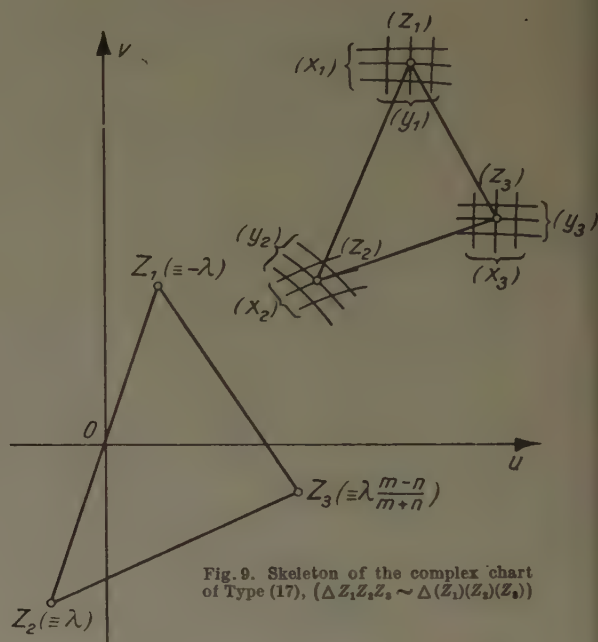


Fig. 9. Skeleton of the complex chart of Type (17), $(\Delta Z_1 Z_2 Z_3 \sim \Delta(Z_1)(Z_2)(Z_3))$

Example

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3} \dots \dots \dots (16).$$

The corresponding chart matrix is

$$\begin{vmatrix} m z_1 & m z_2 & m z_3 \\ n z_1^2 & n z_2^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

In Fig. 8 an example is shown, where nomographic solution of z_3 is $1.28 + 0.60i$ for the exact value $1.28 + 0.58i$, when given values of z_1, z_2 are $2 + 1.5i, 3 + 0.5i$, respectively.

4.3. Type equation

$$f_1 + f_2 = f_3 \dots \dots \dots (17).$$

The chart matrix is

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda \frac{m-n}{m+n} \\ m f_1 & n f_2 & \frac{m n}{m+n} f_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (17'),$$

and the skeleton of the corresponding complex chart is shown in Fig. 9.

When two values of z_j are known, we can easily find the third number z_k , ($j \neq k$), by constructing two similar triangles, without using a pantograph.

If we rewrite the type equation
in logarithmic form, we have

$$f_1 f_2 = f_3 \dots \dots \dots (18)$$

$$\log_e f_1 + \log_e f_2 = \log_e f_3 \dots \dots \dots (19),$$

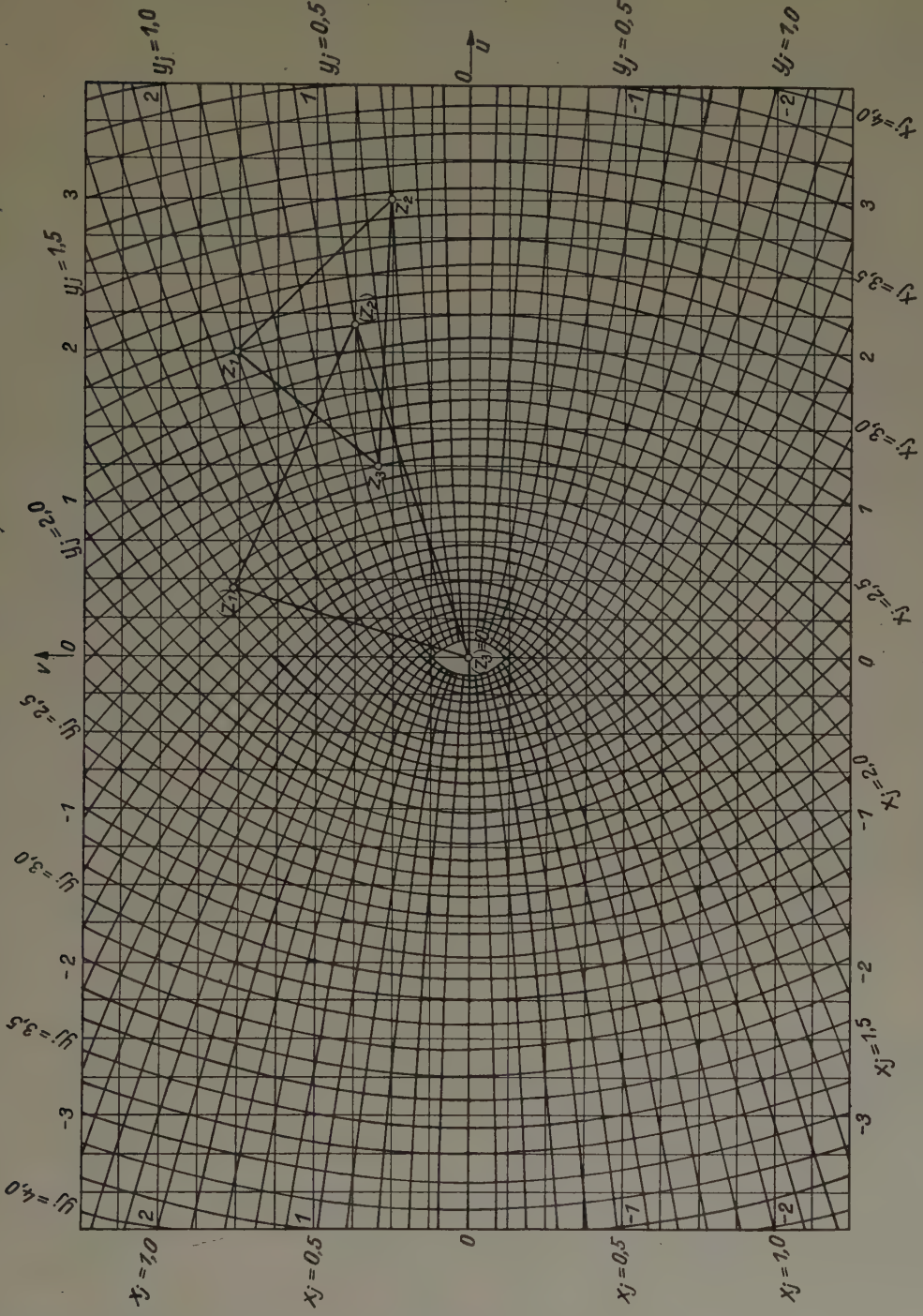


Fig. 8. Nomographic solution of $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$, $(z_j = x_j + iy_j; i^2 = -1; j = 1, 2, 3)$

and this is nothing but Type (17), whence we have

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda \frac{m-n}{m+n} \\ m \log_e f_1 & n \log_e f_2 & \frac{m n}{m+n} \log_e f_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (19).$$

Example

$$z_1 z_2 = z_3 \dots \dots \dots (20).$$

Rewriting this equation in logarithmic form, we obtain

$$\log_e z_1 + \log_e z_2 = \log_e z_3,$$

and if we put in the matrix (19') $f_i \equiv z_i$, ($i = 1, 2, 3$), $m = n$, we have

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ m \log_e z_1 & m \log_e z_2 & \frac{m}{2} \log_e z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

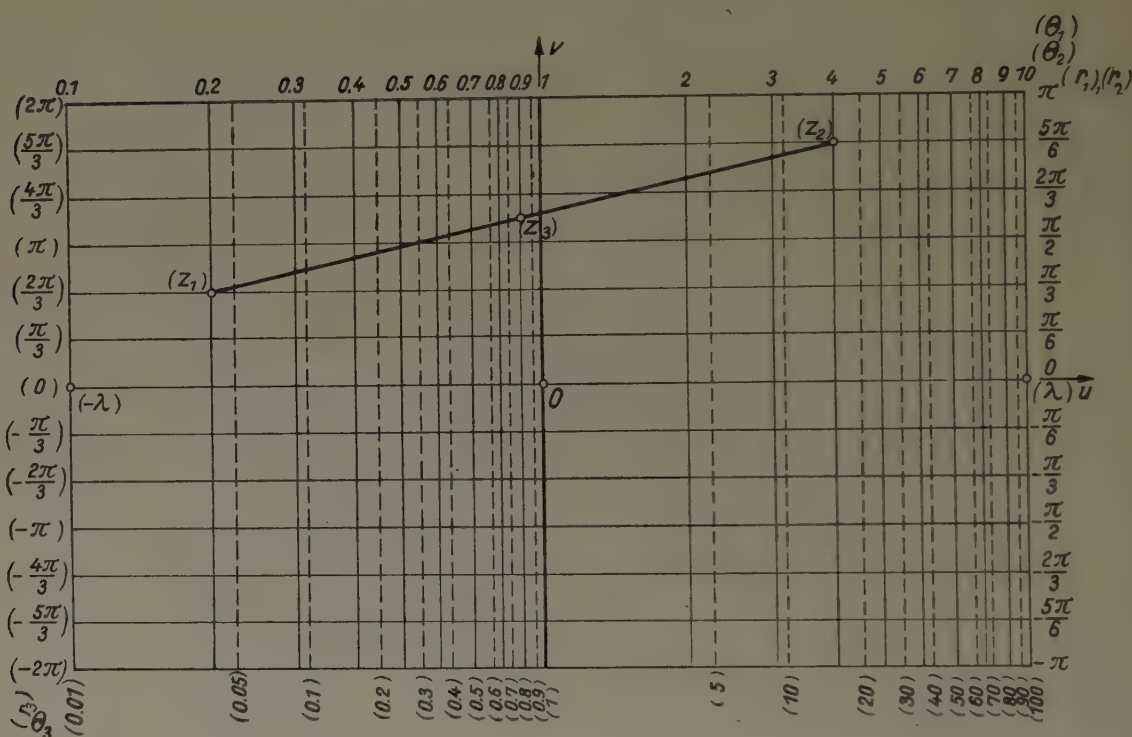


Fig. 10. Nomographic solution of $z_1 z_2 = z_3$ by logarithmic form, ($z_j = x_j + i y_j$, $i^2 = -1$, $j = 1, 2, 3$)

whence we obtain, from the second row of the above matrix,

$$p_{2k}(z_k) = u_k + i v_k = m \log_e z_k = m \log_e (r_k e^{i \theta_k}) = m \log_e r_k + i m \theta_k, \quad (k = 1, 2),$$

$$\therefore \quad u_k = m \log_e r_k, \quad v_k = m \theta_k, \quad (k = 1, 2);$$

$$p_{23}(z_3) = u_3 + i v_3 = \frac{m}{2} \log_e z_3 = \frac{m}{2} \log_e r_3 + \frac{i}{2} m \theta_3,$$

$$\therefore \quad u_3 = \frac{m}{2} \log_e r_3, \quad v_3 = \frac{m}{2} \theta_3.$$

In Fig. 10 λ has a suitable value, but it does not play an essential roll, and we may only obtain the middle point of a segment $\overline{Z_1 Z_2}$, where $z_1 = 0.2 e^{\frac{1}{3} \pi i}$ and $z_2 = 4 e^{\frac{5}{6} \pi i}$, and hence a value of z_3 (middle point of $Z_1 Z_2$) indicates a value $z_3 = 0.8 e^{\frac{7}{6} \pi i}$, (an index of broken lines).

We may, futhermore, easily obtain the complex chart matrices and complex charts for the following typical type equations of complex arguments, which are of the same forms in real nomography:

$$(f_1 + f_2)/(g_1 + g_2) = f_3 \quad \dots \dots \dots (21),$$
$$f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2) g_3 + h_3 = 0 \quad \dots \dots \dots (22),$$
$$f_3/f_1 + g_3/f_2 = 1 \quad \dots \dots \dots (23),$$
$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0 \quad \dots \dots \dots (24),$$
$$f_1 f_2 f_3 = f_1 + f_2 + f_3 \quad \dots \dots \dots (25),$$
$$f_1/f_2 = h_3 \quad \dots \dots \dots (26),$$
$$f_1 f_2 = f_3 \quad \dots \dots \dots (27).$$

In conclusion one of the authors wishes to offer his many thanks to Dr. KINNOSUKÉ OGURA and Dr. WASAO SHIBAGAKI for their hearty encouragements and also to the financial support by the Ministry of Education of Japan.

References

[1] A series of papers published in Akad. Nauk SSSR, Journal of Appl. Math. Mech.; Doklady Akad. Nauk SSSR; Uspehi Matem. Nauk; Mat. Sbornik; Izdat. Moskov, Gos. Univ., Moscov and so on.

[2] REUTTER, F.; Nomographische Darstellung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Z. angew. Math. Mech. 36 (1956), S. 1—3.

[3] In the following paper, T. WAKABAYASHI and T. KANAMARU showed an idea of solid nomograms in regard to the three complex variables not by analytic method but intuitivegeometrically (as Fig. 2 in this paper), and gave the examples for the type equations $f_1 + f_2 = f_3$, $1/f_1 + 1/f_2 = 1/f_3$, $f_1 f_2 = f_3$ as the special cases:
WAKABAYASHI, T. and KANAMARU, T.; On Diagrams and Slide Rules for Complex Numbers, Reports of the Faculty of Engineering, Yamanashi University, No. 7, July 1956, p. 73—90.

[4] D'OCAGNE, MAURICE; Traité de Nomographie (1921), Paris: Gauthier-Villars, p. 294—297.

Manuskripteingang: 1. 8. 1959

Anschriften: Dr. K. MORITA, Section of Applied Mathematics and Physics, Faculty of Technology, Kanazawa University, Kanazawa City, Ishikawa, Japan
Y. SIMOKAWA, The Kanazawa Higher Technical School, Kanazawa City, Ishikawa, Japan

ZAMM 40 (1960) Heft 7/8, Seite 359—367

Mouvement d'un rotor asymétrique tournant dans les paliers élastiques d'une équilibréuse

Par J. E. PLAINEVAUX

Die Bewegung eines unsymmetrischen Körpers bei der Rotation um eine nicht-starr gelagerte Achse, wie sie bei einer Auswuchtmaschine vorliegt, wird untersucht. Die linearisierten Gleichungen weisen periodische Koeffizienten auf; ihre näherungsweise Lösung erfolgt nach einer Methode der Störungsrechnung. Die Bewegung erweist sich als periodisch mit ungeraden harmonischen Komponenten. Die sog. Auswucht-Matrizengleichung ist nicht gültig. Als Anwendung werden Methoden zur Bestimmung der Auswuchtgenauigkeit besprochen.

The motion of an unsymmetrical body rotating in flexible bearings as it does in a balancing machine has been studied. Linearized equations of motion show periodical coefficients; they are approximatively solved by a perturbation method. The motion is periodical with odd harmonics. The so-called balancing matricial equation is not valid. Application to the methods of determining the balancing accuracy.

Etude du mouvement d'un rotor asymétrique déséquilibré tournant dans les paliers flexibles d'une équilibréuse. Les équations linéarisées du mouvement sont à coefficients périodiques. Détermination d'une solution approchée par une méthode de perturbation. Le mouvement est périodique, ne présentant que des harmoniques impairs. L'équation matricielle d'équilibrage n'est pas valable. Application aux différentes méthodes d'expression de la précision d'équilibrage.

В работе изучается движение несимметрического тела, вращающегося в гибких подшипниках, как это имеет место в балансирных механизмах. Линеаризованные уравнения движения обладают периодическими коэффициентами. Они решаются приближенно методом возмущений. Движение является периодическим с нечетными гармоническими. Так называемое уравновешивающее матричное уравнение не имеет места. Дается применение к методам установления точности уравновешивания.

On se propose d'étudier le comportement d'un rotor rigide entraîné à vitesse constante dans les paliers d'une équilibreuse dynamique à paliers élastiques. L'arbre horizontal du rotor repose dans deux paliers P (Figure 1). Chacun de ces paliers forme la partie supérieure d'un portique dont les montants sont des lames de ressort R ; chaque palier n'est donc flexible que dans la direction horizontale perpendiculaire à l'axe du rotor. Le rotor déséquilibré crée en tournant des vibrations à deux degrés de liberté de l'ensemble. Les paliers sont courts, et le jeu de l'arbre dans ceux-ci est suffisant pour ne pas introduire de contraintes. On néglige l'influence de la pesanteur, et on se limite à de petits mouvements.

L'espace est rapporté à un trièdre trirectangle xyz dont l'axe des z coïncide avec l'axe du rotor à l'arrêt, l'origine du trièdre étant placée au palier 1 (Figure 2). L'axe des ordonnées est placé verticalement. Lorsque les paliers vibrent, le premier palier présente une flèche x_1 suivant l'axe des abscisses et le second palier une flèche x_2 . On désigne par L la distance entre les deux paliers. Considérons le point O , point de percée de l'axe du rotor dans le plan mené par le centre de masse G perpendiculairement à l'axe du rotor. Si on se limite aux petits mouvements, le point O décrit en vibrant une droite parallèle à l'axe des abscisses; nous notons x_0 la valeur instantanée de l'abscisse du point O . De même, les centres des paliers 1 et 2 décrivent des droites distantes de la trajectoire de O de L_1 et L_2 .

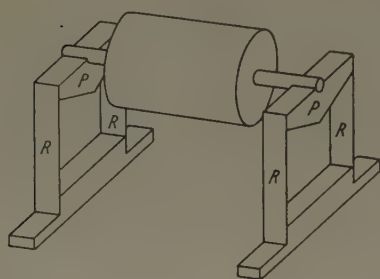


Fig. 1. Rotor monté sur les paliers flexibles d'une équilibreuse dynamique

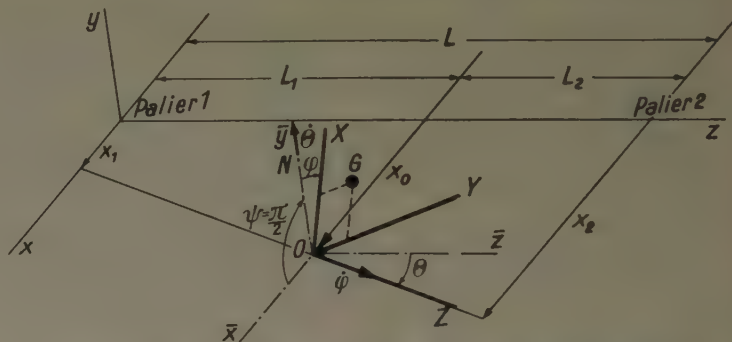


Fig. 2. Trièdres de référence et notations utilisées pour la mise en équation

Envisageons le trièdre en translation $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ayant son origine au point O et dont les axes sont parallèles aux axes x, y, z respectivement. Définissons en dernier lieu un trièdre trirectangle mobile $OXYZ$ attaché au rotor tournant et tel que l'axe OZ coïncide avec l'axe de rotation du rotor, le choix d'un des deux autres axes restant pour le moment à préciser.

Pour définir le mouvement du trièdre $OXYZ$ par rapport au trièdre $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, nous utiliserons les trois angles d'EULER

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi \quad \text{et} \quad \theta$$

la droite des noeuds ON coïncidant avec l'axe $O\bar{y}$. L'angle de rotation propre φ est proportionnel au temps:

$$\varphi = \omega t$$

ω étant la vitesse de rotation — supposée constante — du rotor autour de son axe.

Le mouvement de vibration du rotor se décrit au moyen de deux coordonnées généralisées, nous choisissons le déplacement x_0 du point O et l'angle de nutation θ .

Soit u, v, w les composantes de la vitesse du point O projetée dans le trièdre mobile $OXYZ$ et p, q, r les projections, dans le même trièdre, de la vitesse instantanée de rotation du rotor par rapport au trièdre $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Si on désigne par:

M la masse du rotor,

A, B, C les moments d'inertie du rotor par rapport aux axes OX, OY, OZ respectivement,

D, E, F les produits d'inertie du rotor par rapport aux axes $OY-OZ, OX-OZ$ et $OX-OY$ respectivement,

l'énergie cinétique T du rotor s'exprime par la relation:

$$T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2 D q r - 2 E r p - 2 F p q) + \frac{1}{2} M (u^2 + v^2 + w^2) + M [(w Y_G - v Z_G) p + (u Z_G - w X_G) q + (v X_G - u Y_G) r]$$

X_G, Y_G, Z_G représentant les coordonnées du centre de masse G du rotor dans le trièdre mobile $OXYZ$. Ayant choisi ce trièdre de telle façon que le barycentre se trouve dans le plan $OX Y$, on a $Z_G = 0$.

Les projections de la rotation du rotor par rapport au trièdre $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ sont dans le trièdre $OXYZ$:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\theta} \cos \varphi = \dot{\theta} \cos \omega t, \\ q &= -\dot{\theta} \sin \varphi = -\dot{\theta} \sin \omega t, \\ r &= \dot{\varphi} = \omega. \end{aligned}$$

Le mouvement du point O ayant lieu suivant l'axe $O\bar{x}$, les composantes de la vitesse de O dans le trièdre $OXYZ$ sont:

$$\begin{aligned} u &= -\dot{x}_0 \sin \omega t \cos \theta, \\ v &= -\dot{x}_0 \cos \omega t \cos \theta, \\ w &= \dot{x}_0 \sin \theta. \end{aligned}$$

Moyennant l'introduction de ces expressions et quelques transformations trigonométriques, l'énergie cinétique s'écrit:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\omega t + F \sin 2\omega t \right] + \frac{1}{2} \omega \dot{\theta} [2D \sin \omega t - 2E \cos \omega t] \\ &\quad + \frac{1}{2} C \omega^2 + M \omega \dot{x}_0 \cos \theta [Y_G \sin \omega t - X_G \cos \omega t] + \frac{1}{2} M \dot{x}_0^2 \\ &\quad + M \dot{x}_0 \dot{\theta} \sin \theta [X_G \sin \omega t + Y_G \cos \omega t]. \end{aligned}$$

L'expression du travail virtuel est:

$$\delta \mathfrak{X} = Q_0 \delta x_0 + Q_\theta \delta \theta = -k_1 x_1 \delta x_1 - k_2 x_2 \delta x_2$$

en appelant k_1 et k_2 les rigidités des ressorts des paliers 1 et 2. On pourrait sans difficulté tenir compte de la masse des paliers et d'un amortissement de ceux-ci proportionnel à la vitesse de vibration. Nous n'écrivons pas ces termes — très importants si le rotor tourne près d'une résonance — car nous nous intéressons principalement à ce qui se passe très loin au-dessus des résonances possibles, et là ces termes sont sans importance.

Tenant compte des relations:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - L_1 \theta, \\ x_2 &= x_0 + L_2 \theta \end{aligned}$$

le travail virtuel s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{X} &= -[(k_1 + k_2) x_0 + (k_2 L_2 - k_1 L_1) \theta] \delta x_0 \\ &\quad - [(k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2) \theta + (k_2 L_2 - k_1 L_1) x_0] \delta \theta. \end{aligned}$$

Ecrivons les deux équations de Lagrange relatives aux coordonnées généralisées θ et x_0 , on trouve tous calculs effectués et après linéarisation justifiée par le fait qu'on ne s'intéresse qu'aux petits mouvements de vibrations:

$$M \ddot{x}_0 + (k_1 + k_2) x_0 = -M \omega^2 [Y_G \cos \omega t + X_G \sin \omega t] + (k_1 L_1 - k_2 L_2) \theta \quad . \quad (1),$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\omega t + F \sin 2\omega t \right] + \dot{\theta} \omega [2F \cos 2\omega t - (A-B) \sin 2\omega t] \\ + (k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2) \theta = -\omega^2 [D \cos \omega t + E \sin \omega t] + (k_1 L_1 - k_2 L_2) x_0 \quad . \quad (2). \end{aligned}$$

Précisons la signification des termes d'inertie intervenant dans ces équations. L'axe OZ du trièdre lié au rotor a été choisi en coïncidence avec l'axe de rotation; les axes OX et OY lui étant perpendiculaires. Or, un rotor rigide est toujours équilibrable rigoureusement par l'adjonction de deux balourds situés dans des plans distincts perpendiculaires à l'axe et arbitrairement choisis (équilibre en deux plans). On peut donc choisir le trièdre lié au rotor de telle manière qu'il soit le trièdre central d'inertie en l'absence de deux balourds.

Introduisons deux masses μ_1 et μ_2 distantes du plan XOY de λ_1 et λ_2 et dont les abscisses et ordonnées sont respectivement X_1, X_2 et Y_1, Y_2 (Figure 3). Le trièdre $OXYZ$ étant central en l'absence de ces deux masses, on a pour les produits d'inertie:

$$\begin{aligned} D &= \mu_2 \lambda_2 Y_2 - \mu_1 \lambda_1 Y_1, \\ E &= \mu_2 \lambda_2 X_2 - \mu_1 \lambda_1 X_1, \\ F &= \mu_2 X_2 Y_2 + \mu_1 X_1 Y_1 \end{aligned}$$

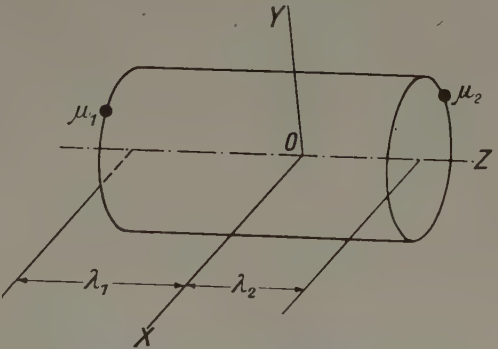


Fig. 3. Définition du déséquilibre du rotor

de même, pour la position du centre de masse:

$$\begin{aligned}X_G &= \frac{\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2}{M + \mu_1 + \mu_2}, \\Y_G &= \frac{\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2}{M + \mu_1 + \mu_2}, \\Z_G &= 0.\end{aligned}$$

Les corrections sur les moments d'inertie s'écrivent sans difficulté. Elles ne présentent guère d'intérêt.

Rotor de révolution

Ce cas a été envisagé d'une manière très détaillée par BLAESS [1]¹⁾ qui étudie aussi le cas plus général où les paliers sont flexibles dans toutes les directions. Ici, l'ellipsoïde d'inertie du rotor est de révolution autour de l'axe de rotation ($A = B$), ce qui simplifie grandement l'étude. BLAESS, en cours de mise en équation, admet que le produit d'inertie F est négligeable, ce qui ramène alors l'équation (2) à une équation différentielle à coefficients constants. Le système des équations (1) et (2) est alors élémentaire à intégrer.

Remarquons que si l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de l'axe de rotation, on a le libre choix des axes OX et OY ; il est dès lors possible de les prendre de telle manière que le produit d'inertie F soit nul.

Cas du rotor quelconque

Ce cas est beaucoup plus compliqué, la résolution du système formé par les équations (1) et (2) présentant de très grandes difficultés du fait que les coefficients de l'équation (2) sont périodiques.

Quelques propriétés relatives à la question du rotor quelconque ont été mises en évidence par SMITH [2].

Nous intéressant à l'équilibrage de pièces non de révolution (vilebrequins par exemple), nous désirons connaître le mouvement d'un rotor quasi-équilibré, ce qui nous permet de traiter le produit d'inertie F comme une quantité petite.

De plus, dans un but de simplification, nous admettrons que la différence des deux moments d'inertie A et B est petite par rapport à leur somme. Enfin, nous nous bornerons souvent à ne considérer que le cas où la vitesse de rotation peut être considérée comme très grande par rapport aux vitesses de résonances possibles du rotor suspendu sur ses paliers élastiques. Toutes ces simplifications sont parfaitement admissibles en pratique comme on le vérifie aisément en étudiant des cas concrets de pratique industrielle d'équilibrage.

Divisons l'équation (1) par M et l'équation (2) par $\frac{A+B}{2}$ et introduisons les paramètres suivants:

$$\begin{aligned}\frac{k_1 + k_2}{M} &= \omega_0^2, & \frac{2(k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2)}{A+B} &= \Omega_0^2, & k_2 L_2 - k_1 L_1 &= \chi, \\ \frac{2D}{A+B} &= D', & \frac{2E}{A+B} &= E', & \frac{A-B}{A+B} &= \Delta\epsilon, & \frac{2F}{A+B} &= f\epsilon.\end{aligned}$$

Avec ces notations, le système différentiel s'écrit:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = -\omega^2 [X_G \sin \omega t + Y_G \cos \omega t] - \frac{\chi}{M} \theta \quad \dots \dots \dots (3),$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} [1 + \Delta\epsilon \cos 2\omega t + f\epsilon \sin 2\omega t] + 2\dot{\theta} \omega [f\epsilon \cos 2\omega t - \Delta\epsilon \sin 2\omega t] \\ + \Omega_0^2 \theta = -\omega^2 [E' \sin \omega t + D' \cos \omega t] - \frac{2\chi}{A+B} x_0 \quad \dots \dots \dots (4)\end{aligned}$$

dans lequel nous pouvons considérer ϵ comme une quantité petite. Pour résoudre approximativement le système (3) (4), considérons les termes en ϵ comme des éléments perturbateurs et développons les solutions en série par rapport au paramètre ϵ :

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0^{(0)} + \epsilon x_0^{(1)} + \epsilon^2 x_0^{(2)} + \epsilon^3 x_0^{(3)} + \dots, \\ \theta &= \theta^{(0)} + \epsilon \theta^{(1)} + \epsilon^2 \theta^{(2)} + \epsilon^3 \theta^{(3)} + \dots.\end{aligned}$$

¹⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée *in fine*.

Par remplacement de ces expressions dans le système (3) (4) on trouve que l'approximation d'ordre zéro est la solution du système différentiel:

$$\ddot{x}_0^{(0)} + \omega_0^2 x_0^{(0)} = -\omega^2 [X_G \sin \omega t + Y_G \cos \omega t] - \frac{\chi}{M} \theta^{(0)} \dots \dots \dots (5),$$

$$\ddot{\theta}^{(0)} + \Omega_0^2 \theta^{(0)} = -\omega^2 [E' \sin \omega t + D' \cos \omega t] - \frac{2 \chi}{A + B} x_0^{(0)} \dots \dots \dots (6)$$

tandis que l'approximation d'ordre j est solution du système:

$$\ddot{x}_0^{(j)} + \omega_0^2 x_0^{(j)} = -\frac{\chi}{M} \theta^{(j)} \dots \dots \dots (7),$$

$$\ddot{\theta}^{(j)} + \Omega_0^2 \theta^{(j)} = -\frac{2 \chi}{A + B} x_0^{(j)} - \ddot{\theta}^{(j-1)} [\Delta \cos 2 \omega t + f \sin 2 \omega t] \\ - 2 \omega \dot{\theta}^{(j-1)} [f \cos 2 \omega t - \Delta \sin 2 \omega t] \dots \dots \dots (8).$$

Approximation d'ordre zéro

Il suffit de résoudre le système à coefficients constants (5) et (6) dont on ne considère que la solution de régime. Celle-ci est:

$$x_0^{(0)} = -\frac{\omega^2}{H} \left\{ \left[(\Omega_0^2 - \omega^2) X_G - \frac{\chi}{M} E' \right] \sin \omega t + \left[(\Omega_0^2 - \omega^2) Y_G - \frac{\chi}{M} D' \right] \cos \omega t \right\},$$

$$\theta^{(0)} = -\frac{\omega^2}{H} \left\{ \left[(\omega_0^2 - \omega^2) E' - \frac{2 \chi}{A + B} X_G \right] \sin \omega t + \left[(\omega_0^2 - \omega^2) D' - \frac{2 \chi}{A + B} Y_G \right] \cos \omega t \right\}$$

avec:

$$H = (\omega^2 - \omega_0^2) (\omega^2 - \Omega_0^2) - \frac{2 \chi^2}{M (A + B)}.$$

Les variables que nous avons utilisées ne sont en général pas des variables canoniques ou naturelles pour lesquelles les deux degrés de liberté de vibration seraient découplés. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que $\chi = k_2 L_2 - k_1 L_1$ soit nul.

La vibration du rotor est, à l'approximation zéro, une vibration sinusoïdale de pulsation ω égale à la pulsation de la rotation imposée. Le phénomène est caractérisé par deux résonances correspondant aux racines de l'équation aux fréquences propres $H = 0$.

Suivant le théorème général bien connu, les pulsations couplées de résonances sont extérieures à l'intervalle des pulsations propres ω_0 et Ω_0 .

En général, les pulsations de résonances sont voisines des pulsations ω_0 et Ω_0 , le terme de couplage étant petit dans la plupart des rotors utilisés industriellement. Remarquons que les machines à équilibrer sont construites avec $k_1 = k_2$; dans ce cas, il y a découplage si le barycentre est équadistant des paliers.

L'approximation d'ordre zéro qu'on vient d'étudier est celle qui correspond à l'étude de BLAESS. Elle suffit amplement pour le cas des rotors à ellipsoïde d'inertie de révolution autour de l'axe de rotation. Sur une équilibreuse moderne, le rapport de la vitesse de rotation à la plus grande des deux vitesses de résonance est généralement élevé; en pratique, souvent de l'ordre de 10. Il est dès lors logique de rechercher ce que deviennent ces solutions lorsque les rapports ω_0/ω et Ω_0/ω tendent vers zéro. On trouve:

$$x_0^{(0)} = X_G \sin \omega t + Y_G \cos \omega t,$$

$$\theta^{(0)} = E' \sin \omega t + D' \cos \omega t$$

ce qu'on pouvait prévoir aisément,

Approximation d'ordre un

On est conduit à résoudre le système différentiel formé par les équations (7) et (8) lorsqu'on y fait $j = 1$.

On trouve, tous calculs effectués:

$$x_0^{(1)} = \frac{\chi/M}{\omega^2 - \omega_0^2} [S_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t] + \frac{\chi/M}{9 \omega^2 - \omega_0^2} [S_3 \sin 3 \omega t + C_3 \cos 3 \omega t],$$

$$\theta^{(1)} = S_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + S_3 \sin 3 \omega t + C_3 \cos 3 \omega t$$

où S_1 , C_1 , S_3 , C_3 représentent les expressions suivantes:

$$S_1 = \frac{-\omega^4 (\omega_0^2 - \omega^2)}{2H^2} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) (fD' - \Delta E') + \frac{2\chi}{A+B} (\Delta X_G - fY_G) \right],$$

$$C_1 = \frac{-\omega^4 (\omega_0^2 - \omega^2)}{2H^2} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) (fE' + \Delta D') - \frac{2\chi}{A+B} (fX_G + \Delta Y_G) \right],$$

$$S_3 = \frac{3\omega^4 (\omega_0^2 - 9\omega^2)}{2HK} \left[-(\omega_0^2 - \omega^2) (\Delta E' + fD') + \frac{2\chi}{A+B} (\Delta X_G + fY_G) \right],$$

$$C_3 = \frac{3\omega^4 (\omega_0^2 - 9\omega^2)}{2HK} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) (fE' - \Delta D') + \frac{2\chi}{A+B} (\Delta Y_G - fX_G) \right]$$

$$\text{avec } K = (\omega_0^2 - 9\omega^2) (\Omega_0^2 - 9\omega^2) - \frac{2\chi^2}{M(A+B)}.$$

On constate de légères modifications à l'amplitude de vibration à même fréquence que celle de la rotation imposée. Mais, et ceci est beaucoup plus important, on constate l'apparition de vibrations de fréquence triple, qui viennent se superposer aux vibrations fondamentales. Les expressions de C_3 et de S_3 montrent aussi l'apparition de deux nouvelles résonances, mais celles-ci ayant lieu pour des vitesses environ trois fois plus petites que les résonances de l'ordre zéro, sont sans importance pour l'étude poursuivie.

Quand on fait tendre vers l'infini la vitesse de rotation, de manière à obtenir le comportement du système très au-dessus des résonances, on trouve les expressions suivantes:

$$x_0^{(1)} = 0,$$

$$\theta^{(1)} = \frac{1}{2} (fD' - \Delta E') \sin \omega t + \frac{1}{2} (fE' + \Delta D') \cos \omega t - \frac{1}{6} (\Delta E' + fD') \sin 3\omega t \\ + \frac{1}{6} (fE' - \Delta D') \cos 3\omega t.$$

L'apparition d'une vibration de fréquence triple est donc surtout sensible dans le mouvement de vibration de nutation du rotor.

Approximations d'ordres supérieurs

Celles-ci s'obtiennent comme précédemment. On voit apparaître des résonances à des vitesses de plus en plus basses et donc sans importance. Nous nous bornerons à écrire les valeurs des approximations d'ordre deux dans le cas des vitesses de rotations élevées. On trouve:

$$x_0^{(2)} = 0,$$

$$\theta^{(2)} = \frac{1}{2} (\Delta^2 + f^2) (E' \sin \omega t + D' \cos \omega t) - \frac{1}{12} (2f\Delta D' + f^2 E' - \Delta^2 E') \sin 3\omega t \\ - \frac{1}{12} (2f\Delta E' - f^2 D' + \Delta^2 D') \cos 3\omega t + \frac{1}{20} (2f\Delta D' + \Delta^2 E' - f^2 E') \sin 5\omega t \\ - \frac{1}{20} (2f\Delta E' + f^2 D' - \Delta^2 D') \cos 5\omega t.$$

Il apparaît dans le mouvement de nutation une vibration à fréquence cinq fois plus élevée.

On n'éprouve aucune difficulté à poursuivre les calculs, on trouve successivement tous les harmoniques impairs.

Formules générales

Il suffit de sommer les différentes approximations trouvées après multiplication par la puissance de ε adéquate. Revenant ensuite aux paramètres initiaux, on trouve, pour les grandes vitesses de rotation:

$$x_0 = X_G \sin \omega t + Y_G \cos \omega t,$$

$$\theta = \sin \omega t \left[\frac{2E}{A+B} + \frac{2DF - E(A-B)}{(A+B)^2} + \frac{E(A-B)^2 + 4EF^2}{(A+B)^3} + \dots \right] \\ + \cos \omega t \left[\frac{2D}{A+B} + \frac{2EF + D(A-B)}{(A+B)^2} + \frac{D(A-B)^2 + 4DF^2}{(A+B)^3} + \dots \right] \\ + \sin 3\omega t \left[-\frac{E(A-B) + 2DF}{3(A+B)^2} + \frac{E(A-B)^2 - 4DF(A-B) - 4EF^2}{6(A+B)^3} + \dots \right] +$$

+ cos 3 ω t [- \frac{D(A - B) - 2 E F}{3 (A + B)^2} - \frac{D(A - B)^2 + 4 E F (A - B) - 4 D F^2}{6 (A + B)^3} + \dots]

+ sin 5 ω t [\frac{E (A - B)^2 + 4 D F (A - B) - 4 E F^2}{10 (A + B)^3} + \dots]

+ cos 5 ω t [\frac{D(A - B)^2 - 4 E F (A - B) - 4 D F^2}{10 (A + B)^3} + \dots]

+ \dots \dots \dots

A partir de ces expressions, il n'est pas difficile de trouver les valeurs des vibrations des paliers 1 et 2 puisque ces vibrations sont les combinaisons linéaires des vibrations x_0 et θ dont les expressions ont été écrites précédemment.

Incidences sur le fonctionnement des équilibreuses

Dans les formules précédentes, bornons-nous aux approximations d'ordre zéro et un, pour un rotor tournant loin au-dessus des résonances. On constate qu'il n'y a pas d'effet de perturbation sur le mouvement de l'origine du trièdre tournant. Rappelons que cette origine est le point de percée de l'axe de rotation dans le plan qui lui est perpendiculaire passant par le barycentre. Ce résultat était prévisible par simple application du théorème de la quantité de mouvement.

Par contre, le mouvement de nutation du rotor est influencé par les termes périodiques. Ceci justifie le choix des coordonnées généralisées utilisées.

Il est donc logique, pour simplifier l'étude, d'envisager le mouvement d'un rotor équilibré statiquement et ne présentant que du déséquilibre purement dynamique.

Deux cas de déséquilibre purement dynamique sont à envisager :

- a) le plan des deux balourds coïncide avec le plan OXZ,
- b) le plan des deux balourds coïncide avec le plan OYZ.

Ces deux cas sont simples à étudier et vont nous donner toute l'information désirable; ce qui nous permettra d'éviter l'étude d'un troisième cas où le plan des balourds, passant par l'axe OZ, présente un azimut quelconque.

- a) le plan des deux balourds coïncide avec le plan OXZ

Le corps tournant ne présentant qu'un déséquilibre purement dynamique, on a X_G = Y_G = 0. La coïncidence du plan des balourds avec le plan OXZ conduit à D = F = 0. Le mouvement de nutation du rotor est alors donné par :

\frac{\theta}{E} = \frac{A + 3 B}{(A + B)^2} \sin \omega t - \frac{A - B}{3 (A + B)^2} \sin 3 \omega t + \dots

en se limitant aux approximations zéro et un.

Le fondamental du mouvement de nutation, ou le mouvement d'un des paliers qui lui est ici proportionnel, est donc représentatif du couple de balourds avec un facteur de représentation valant :

\frac{A + 3 B}{(A + B)^2}

Le rapport de l'harmonique trois de la vibration, au fondamental est en ce qui concerne les amplitudes de vibration :

\frac{a_3}{a_1} = - \frac{1}{3} \frac{A - B}{A + 3 B}

- b) le plan des deux balourds coïncide avec le plan OYZ

Dans ce cas, on trouve X_G = Y_G = D = E = 0.

Le mouvement de nutation du rotor est :

\frac{\theta}{D} = \frac{3 A + B}{(A + B)^2} \cos \omega t - \frac{A - B}{3 (A + B)^2} \cos 3 \omega t + \dots

Le fondamental de la nutation représente le couple de balourds avec un coefficient de proportionnalité valant ici :

$$\frac{3A + B}{(A + B)^2}$$

tandis que le rapport de l'harmonique trois au fondamental est, en ce qui concerne les amplitudes :

$$\frac{a_3}{a_1} = -\frac{1}{3} \frac{A - B}{3A + B}.$$

Le facteur de représentation du balourd étant différent dans les deux cas particuliers envisagés, il s'en suit que le tarage de l'équilibreuse ne peut être fait simplement dans un azimut quelconque comme on a l'habitude de le faire. Il faudrait tarer la machine pour tous les azimuts de balourds possibles — ce qui est impraticable. Il ne faut pas perdre de vue que cette conclusion n'est valable que si les moments d'inertie A et B sont différents. Au cas où le rotor est de révolution, l'étalonnage est indépendant de l'azimut et les propriétés bien connues des équilibreuses sont alors parfaitement valables. En pratique, on traite les rotors asymétriques comme des rotors de révolution, la différence entre les moments d'inertie étant souvent assez petite, ce qui justifie le procédé. On remarquera que dans tous les cas il y a proportionnalité entre la vibration et la grandeur du balourd; à ce point de vue le système est linéaire.

Le rapport des amplitudes de l'harmonique trois au fondamental est aussi différent suivant l'azimut considéré; il est donc nécessaire d'annuler les harmoniques lors des mesures. Pour ce faire, un des meilleurs procédés est d'employer une méthode de mesure utilisant un wattmètre.

L'importance des harmoniques est surtout grande lorsqu'on utilise un capteur de vibration électro-magnétique, comme c'est le cas dans la majorité des équilibreuses modernes. Ces capteurs donnant lieu à une force électro-motrice proportionnelle à la vitesse de vibration, exagèrent l'importance des harmoniques de rangs élevés proportionnellement à leur rang.

Un rotor asymétrique ne peut donc être traité suivant l'approximation qu'on utilise en pratique et qui consiste à "linéariser" les équations de mouvement. Ce procédé a conduit à ce qu'on appelle l'équation matricielle de l'équilibreuse exposée par FEDERN [3] et qui se montre extrêmement utile en pratique. Cette méthode consiste à écrire que les vibrations \bar{V}_1 et \bar{V}_2 des paliers 1 et 2 sont des fonctions linéaires des balourds \bar{b}_I et \bar{b}_{II} placés dans les plans d'équilibrage I et II . On écrit alors :

$$\bar{V}_1 = [\alpha_{1I}] \bar{b}_I + [\alpha_{1II}] \bar{b}_{II},$$

$$\bar{V}_2 = [\alpha_{2I}] \bar{b}_I + [\alpha_{2II}] \bar{b}_{II}$$

les $[\alpha]$ étant des coefficients d'influence dynamiques. La notation vectorielle est employée pour indiquer qu'il s'agit de fonctions sinusoïdales dans le temps qu'on représente par des vecteurs tournants en travaillant dans un plan de GAUSS comme on est accoutumé à le faire en électricité.

Il y a lieu de préciser le sens du terme "linéarisation". Les équations de mouvement du rotor peuvent être linéarisées au sens du mathématicien; mais ces équations linéaires sont à coefficients périodiques. Le mécanicien a tendance à baptiser linéarisation, non pas l'obtention d'équations linéaires (à coefficients variables ou non) mais bien l'obtention d'équations linéaires à coefficients constants. C'est du sens plus restrictif donné par le mécanicien à l'expression "linéarisation" que provient le malentendu qu'on rencontre en équilibrage.

Précision d'équilibrage

En Europe, on a coutume de définir la précision de l'équilibrage par la limite supérieure du balourd résiduel admissible dans chaque plan d'équilibrage du rotor. Souvent ce balourd résiduel est exprimé par l'excentricité maximum correspondante du barycentre.

Depuis une dizaine d'années est apparu aux U.S.A. un nouveau procédé d'exprimer le déséquilibre résiduel admissible. Ce procédé, dû à SENER [4], [5], [6], qui admet implicitement que l'ellipsoïde d'inertie du rotor est de révolution autour de l'axe de rotation, consiste à limiter les déplacements que prendraient les paliers, le rotor tournant autour de son axe naturel de rotation. C'est ce qui se passerait si le rotor était entraîné à une vitesse quelconque étant placé dans des paliers absolument libres.

Dans le plan d'équilibrage distant de λ de l'origine, introduisons une masse μ dont l'ordonnée est Y , l'abscisse X étant nulle. On trouve:

$$X_G = 0, \quad Y_G = \frac{\mu Y}{M + \mu},$$

$$D = -\mu \lambda Y, \quad E = F = 0.$$

Les moments d'inertie A et B étant supposés égaux, le mouvement du rotor, très au-dessus des résonances, est défini par:

$$x_0 = Y_G \cos \omega t,$$

$$\theta = \frac{D}{A} \cos \omega t.$$

Il en résulte que le mouvement du palier 1 a une amplitude qui vaut:

$$\frac{\mu Y}{M + \mu} + \frac{\mu Y \lambda}{A} L_1.$$

Cette expression se compose de deux termes, le premier provient du déplacement du centre de masse, et le second résulte du mouvement de nutation.

Avec les mêmes notations, SENGHER trouve que l'amplitude du déplacement du palier s'exprime sensiblement par:

$$\frac{\mu Y}{M + \mu} + \frac{\mu Y \lambda}{A - C} L_1$$

le premier terme étant dû au déplacement du centre de masse, tandis que le second provient de l'inclinaison de l'axe naturel du rotor causée par l'adjonction de la masse μ . La formule de SENGHER n'est pas valable si le rotor présente une sphère d'inertie ($A = B = C$).

On constate que la mesure du résidu de déplacement du palier d'une équilibreuse, ne donne pas d'information précise sur le déplacement qu'aurait le palier dans le cas du rotor complètement libre. Cela provient du fait que lorsque le rotor se trouve sur une équilibreuse, où les paliers ne sont libres que dans une direction, les couples gyrostatiques sont repris par les paliers sous forme de réactions de liaisons agissant perpendiculairement au plan défini par l'axe de rotation et la direction du déplacement des paliers. L'estimation du résidu de déplacement des paliers de l'équilibreuse est la seule mesure aisée à faire industriellement. La méthode américaine de définition du déséquilibre résiduel n'est pas d'un accès expérimental aisé. C'est pourquoi on peut se demander si un avenir lui est réservé.

Bibliographie

- [1] VIKTOR BLAESS, Über den Massenausgleich raschumlaufender Körper. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 6 (1926), p. 429—448.
- [2] D. M. SMITH, The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings. Proceedings Royal Society (London) A 142 (1933), p. 92—118.
- [3] KLAUS FEDERN, Moderne Lösungen des Auswuchtproblems. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 25/27 (1947), p. 164—165.
- [4] WERNER I. SENGHER, Specifying dynamic balance. Machine Design. Novembre & Décembre 1944 ainsi que Janvier & Février 1945.
- [5] WERNER I. SENGHER, Static and dynamic Balancing. Section 89 du „Tool Engineers Hand Book“.
- [6] W. I. SENGHER, L'équilibrage statique et dynamique. Machine Moderne Août 1953. (Traduction de [5].)

Citons aussi:

А. Ф. Попов, Исследование электромеханических балансировочных машин. Труды семинара по теории машин и механизмов. Ин-та машиноведения Академии Наук С. С. С. Р. 12 (1952) № 46, p. 46—71.

pour l'étude des vibrations du rotor déséquilibré tournant dans des paliers suspendus par fils.

Manuskripteingang: 14. 9. 1959

Anschrift: Prof. Dr. J. E. PLAINEVAUX, Université de Bruxelles, Avenue Roosevelt 50, Bruxelles, Belgique

KLEINE MITTEILUNGEN

Wirkungszusammenhänge mechanischer Glieder*)

1. Übersicht

Zunächst wird das Wirkungsschema eines mechanischen Systems, welches aus zwei durch eine Feder verbundenen Massenpunkten besteht, entwickelt. Es ergibt sich eine ringförmig zusammenhängende Struktur der Wirkungslinien. Das Wirkungsschema der idealisierten Feder erhält man durch einen Grenzübergang derart, daß man mit der Größe der Massen gegen Null geht. Zur Durchführung von Schnitten erweist es sich als erforderlich, mit der Größe der Federkonstanten gegen Unendlich zu gehen. Dabei ergibt sich auch der Wirkungszusammenhang des Kraftangriffes am Massenpunkt. Abschließend wird das Wirkungsschema des linearen elastischen Kontinuums entwickelt. Wesentlich ist hierbei, daß jedes herausgeschnittene Stück grundsätzlich das gleiche Bewegungsverhalten zeigt. Das Wirkungsschema des starren Massenstabes erhält man durch Grenzübergang.

2. Das Zweimassensystem und sein Wirkungsschema

Die Massenpunkte m_1 und m_2 sind nach Bild 1 durch die Feder F verbunden und bilden ein schwingungsfähiges System. Als Anfangszustand denken wir

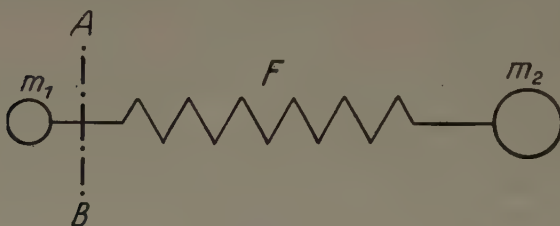


Bild 1

uns die Feder gespannt, die Massenpunkte ruhend und verfolgen den eintretenden Bewegungsablauf hinsichtlich seines Wirkungszusammenhanges.

Die Feder übt auf die Massenpunkte bestimmte Kräfte aus, wodurch jene beschleunigt werden. Diese Massenbeschleunigungen ziehen Ortsveränderungen nach sich, und diese wiederum bedingen eine Änderung der Federlänge. Der veränderten Federlänge entsprechen bestimmte Federkräfte, welche die Massenpunkte nunmehr beschleunigen. Man erkennt hieraus, daß diesem kontinuierlichen Vorgang ein ringartig zusammengeschlossenes Wirkungsschema nach Bild 2 entspricht.

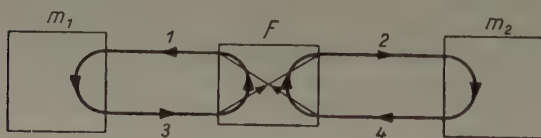


Bild 2

Die Massenpunkte und die Feder sind in Bild 2 durch die Blöcke m_1 , m_2 und F dargestellt, die durch die Linien 1, 2, 3 und 4 verbunden sind. Die Linien 1 und 2 stellen die von der Feder F auf die Massenpunkte ausgeübten Kräfte dar, die Linien 3 und 4 die in die Feder eingehenden Ortsveränderungen der Massenpunkte. Die in den Blöcken F , m_1 und m_2 eingetragenen Pfeile ergeben sich sinngemäß daraus,

*) Aus der Dissertation des Verfassers „Systemtheoretische Abbildungen von mechanischen Gebilden und deren Verallgemeinerungen“ T.H. München 1958 ergeben sich Zusammenhänge, die hier teilweise auf die Mechanik übertragen werden.

daß die jeweiligen Ortsveränderungen der Massenpunkte m_1 und m_2 und damit der Federenden als Eingangsgrößen des Blockes F (Linien 3 und 4) auf die Federkräfte als Ausgangsgrößen (Linien 1 und 2) einwirken. Der nach Bild 2 ringartig geschlossene Wirkungszusammenhang ist unabhängig von der Größe der Systemparameter und soll als rückgekoppelt aufgefaßt werden. Diese Rückkoppelung ist starr, d. h. die Federenden führen dieselben Bewegungen wie die zugehörigen Massenpunkte aus. Es besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen der Bewegungsgleichung des Systems nach Bild 1 und dem Wirkungsschema nach Bild 2.

3. Das Wirkungsschema der idealisierten Feder

Aus dem System nach Bild 1 und Bild 2 läßt sich das Wirkungsschema der idealisierten, masselosen Feder durch einen Grenzübergang ableiten. Dieser Grenzübergang besteht darin, daß man mit den Größen der Massen m_1 und m_2 gegen den Wert 0 geht. Setzt man fest

$$\lim_{m_1 \rightarrow 0} m_1 = \Delta m_1,$$

$$\lim_{m_2 \rightarrow 0} m_2 = \Delta m_2$$

so erhält man als Wirkungsschema der idealisierten Feder die Darstellung nach Bild 3. Der rückgekoppelte Zusammenhang bleibt auch dann erhalten, wenn man anstatt der Massen Dämpfungen oder allgemeiner Glieder verwendet, deren Eingangsgrößen

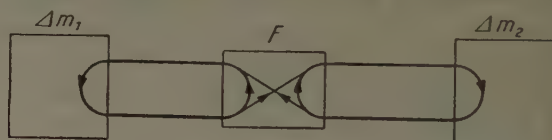


Bild 3

Kräfte und deren Ausgangsgrößen Koordinatenableitungen sind, und mit den Parametern einen entsprechenden Grenzübergang durchführt.

4. Schnittvorgang

Die bisher durchgeführten Darstellungen gelten dann, wenn man die Systeme als unteilbares Ganzes betrachtet, d. h. wenn man von Schnitten absieht. Will man z. B. in Bild 1 die Masse m_1 von dem übrigen System abtrennen, so ist der Schnitt A-B auszuführen. Demgegenüber ist aus dem Wirkungsschema nach Bild 2 nicht ohne weiteres zu erkennen, in welcher Weise z. B. die Masse m_1 abzutrennen wäre. In dieser Hinsicht ist Bild 2 noch unvollständig.

Zur Durchführung des Schnittes betrachten wir Bild 4. Hierin sind die beiden Massenpunkte m_1 und

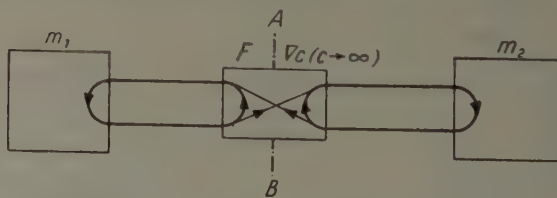


Bild 4

m_2 als starr verbunden anzusehen, und zwar dadurch, daß die Größen der Federkonstanten c der die beiden Massenpunkte verbindenden Feder F durch Grenzübergang gegen den Wert ∞ geht. Wir setzen fest

$$\lim_{c \rightarrow \infty} c = \sqrt{c}.$$

Will man nun die Massenpunkte m_1 und m_2 voneinander trennen, so ist der Schnitt $A-B$ durch F zu legen. In den Bildern 5a, b, c ist die starre Feder F von Bild 4 in den bei der Ausführung des Schnittes

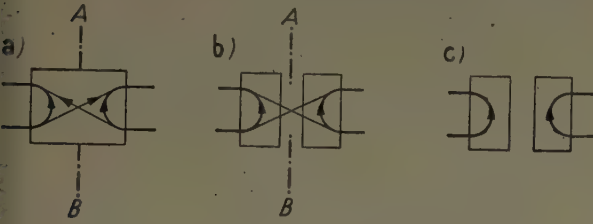


Bild 5

$A-B$ entstehenden Schnittstadien dargestellt. Nach der Ausführung des Schnittes gilt für die Gesamtdarstellung das Bild 6 mit der vollständigen Trennung der beiden Massenpunkte m_1 und m_2 . Die Blocksysteme m_1 mit F_1 bzw. m_2 mit F_2 stellen, jedes für

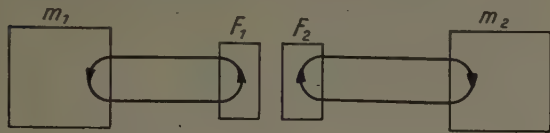


Bild 6

sich, das Wirkungsschema des Kraftangriffes am Massenpunkt dar. Die Einleitungsstellen der Kräfte befinden sich bei F_1 bzw. F_2 . Auch hier ergibt sich der ringförmig geschlossene Wirkungszusammenhang. Er äußert sich darin, daß die einwirkende Kraft starr am Massenpunkt angeheftet ist und somit denselben Weg wie dieser zurücklegt.

Da bei der hier behandelten eindimensionalen Bewegung Kraftangriffe auch beidseitig auftreten können, wird das in dieser Hinsicht vervollständigte Wirkungsschema durch Bild 7 dargestellt, links und

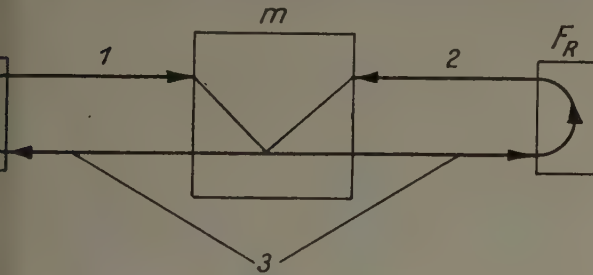


Bild 7

rechts befinden sich die Einleitungsstellen F_L und F_R für die Kräfte. In den Block m gehen die Kräfte darstellenden Linien 1 und 2 ein. Die Ortsveränderung des Massenpunktes als Ausgangsgröße ist durch die Linie 3 dargestellt. In dieser Hinsicht sind die vorhergehenden Wirkungsschemata gegebenenfalls noch zu ergänzen.

Um die Abtrennung des Massenpunktes m_1 durch den Schnitt $A-B$ von der Feder F entsprechend

Bild 1 in einem Wirkungsschema durchzuführen, gehen wir von Bild 8 aus. Hier wird das Federende, wie sich aus dem Wirkungsschema der idealisierten Feder ergibt, durch den verschwindenden Massen-

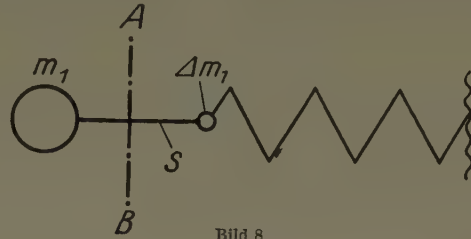


Bild 8

punkt Δm_1 begrenzt. Der Massenpunkt m_1 ist mit Hilfe der starren Verbindung S an Δm_1 angekuppelt.

5. Das eindimensionale, mit Masse behaftete elastische Kontinuum

Dieses entsteht aus dem System nach Bild 1 dadurch, daß man immer mehr und kleinere Massen und Federn wechselweise hintereinanderschaltet. Da man ein solches Kontinuum in beliebig viele Teile zerschneiden kann, wobei jeder herausgeschnittene Teil grundsätzlich dasselbe Bewegungsverhalten zeigt, ergibt sich unter Berücksichtigung des Wirkungsschemas der Feder eine Anordnung nach Bild 9. Die

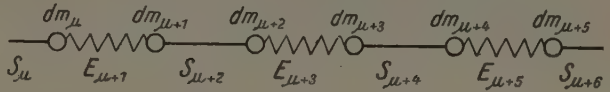


Bild 9

differentiellen Massen dm_μ sind mit Elementarfedern derart hintereinandergeschaltet, daß jeweils eine starre Elementarfeder S_μ mit einer elastischen Elementarfeder E_μ abwechselt. Schnitte sind nur durch starre Elementarfedern möglich. Das sich hieraus ergebende Wirkungsschema eines mit Masse behafteten eindimensionalen elastischen Kontinuums zeigt Bild 10. Die den Elementarmassen entsprechenden Blöcke dm_μ sind wechselweise mit den starren Elementarfedern S_μ bzw. den elastischen Elementarfedern E_μ in Reihe geschaltet. Schnitte sind in der oben angegebenen Weise durch die starren Glieder S_μ zu legen. Das elastische mit Masse behaftete Element des Kontinuums erhält man durch die Schnitte $X-X$ und $Y-Y$.

Man sieht aus Bild 10, daß immer Blöcke abwechselnd so aufeinander folgen, daß die jeweiligen Eingangsgrößen des einen Blockes Ausgangsgrößen des benachbarten sind, woraus die rückgekoppelten Wirkungszusammenhänge folgen.

Der Übergang zum starren eindimensionalen Kontinuum ist dadurch gegeben, daß man die elastischen Elementarfedern E_μ durch starre ersetzt. Das Wirkungsschema bleibt aber erhalten, und drückt hier aus, daß jedes Massenstück auch nach dem Abtrennen wieder Masseneigenschaften hat.

Verfasser: Dr. ROBERT GÄRTNER, Düsseldorf, Wittelsbachstr. 41a

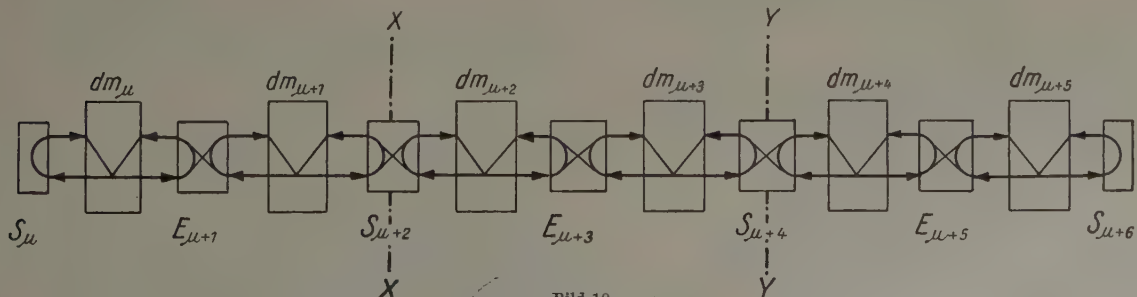


Bild 10

Sur l'équation différentielle d'un problème de technique étudié par M. R. Gran Olsson

En étudiant un problème de technique, M. R. GRAN OLSSON [1] arrive à l'équation différentielle de quatrième ordre.

$$f(x) (y^{IV} - 2a^2 y'' + a^4 y) + 2f'(x) (y''' - a^2 y') = 0, \quad (a = \text{const.}) \quad (1)$$

qu'il transforme, par une substitution des variables, en équation linéaire du deuxième ordre

$$(v'' - 2a v') f(x) - v f''(x) = 0, \quad (v = v(x)) \quad (2)$$

qu'ensuite il trouve résoluble par quadratures quand

$$f(x) = Ax + B, \quad (A = \text{const.}, B = \text{const.})$$

D. MITRINOVITCH [2] a donné deux méthodes de résolution de cette équation par quadratures et les solutions obtenues dépendent d'une fonction arbitraire de la variable x .

Dans cette note l'équation (2) est traitée comme une équation différentielle indéterminée du deuxième ordre avec deux fonctions inconnues, $v(x)$ et $f(x)$. Cette équation appartient à une classe plus large d'équations indéterminées intégrables de forme

$$z y'' - y z'' + a_1 z y' + a_2 y z' = a_3 z y, \quad (a_v = a_v(x)) \quad (3)$$

où $y(x)$ et $z(x)$ sont des fonctions inconnues.

Les solutions de (3), et même de (2), sont exprimées par deux constantes arbitraires et une fonction complètement arbitraire de la variable x .

La méthode appliquée est basée sur quelques relations entre les dérivées relatives de M. PETROVITCH, [3].

La dérivée relative du n -ième ordre de la fonction $u(x)$ est introduite par la définition

$$\Delta_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}, \quad (u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n})$$

d'où l'on tire de nombreuses relations entre les dérivées relatives.

Ici seront appliquées les relations suivantes

$$\Delta_1(u_1 u_2) = \Delta_1(u_1) + \Delta_1(u_2);$$

$$\Delta_1\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \Delta_1(u_1) - \Delta_1(u_2); \quad \Delta_1(u) = n \Delta_1(u);$$

$$\Delta_2(u) = \Delta_1'(u) + \Delta_1^2(u);$$

$$\Delta_1(\exp \int u dx) = \exp \int \Delta_1(u) dx = u; \quad u_v = u_v(x).$$

Il suit directement de ces relations

$$\Delta_2(u_1) - \Delta_2(u_2) = \Delta_1\left(\frac{u_1}{u_2}\right) \Delta_1\left[u_1 u_2 \Delta_1\left(\frac{u_1}{u_2}\right)\right] \quad (4).$$

1° L'équation (3) peut être mise sous la forme

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) + a_1 \Delta_1(y) + a_2 \Delta_1(z) = a_3 \quad (5),$$

ou bien, en vertu de (4)

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right) \Delta_1\left[y z \Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\right] + a_1 \Delta_1(y) + a_2 \Delta_1(z) = a_3.$$

En introduisant la fonction $\lambda(x)$ par la substitution

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right) = \lambda, \quad y = z \exp \int \lambda dx \quad (6)$$

la dernière équation devient

$$\lambda \Delta_1(\lambda z^2 \exp \int \lambda dx) + a_1(\lambda + \Delta_1(z)) + a_2 \Delta_1(z) = a_3, \quad \text{de laquelle on déduit}$$

$$\Delta_1(z) = \frac{a_3 - \lambda' - \lambda^2 - a_1 \lambda}{a_1 + a_2 + 2\lambda} \quad (7).$$

La substitution de cette valeur en (6) donne

$$\Delta_1(y) = \frac{a_3 - \lambda' + \lambda^2 + a_2 \lambda}{a_1 + a_2 + 2\lambda} \quad (8).$$

On obtient les solutions de l'équation (5) de (7) et (8)

$$\left. \begin{aligned} y &= A \exp \int \frac{a_3 - \lambda' + \lambda^2 + a_2 \lambda}{a_1 + a_2 + 2\lambda} dx \\ z &= B \exp \int \frac{a_3 - \lambda' - \lambda^2 - a_1 \lambda}{a_1 + a_2 + 2\lambda} dx \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$(A = \text{const.}, B = \text{const.})$$

où $\lambda(x)$ est une fonction arbitraire.

2° L'équation (2) peut être exprimée sous la forme (5)

$$\Delta_2(v) - 2a \Delta_1(f) - \Delta_2(f) = 0 \quad (10),$$

et la solution de cette équation est, en vertu de (9)

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{A}{(\lambda - a)^{1/2}} \exp \frac{1}{2} \int \frac{-\lambda^2}{\lambda - a} dx \\ f &= \frac{B}{(\lambda - a)^{1/2}} \exp \frac{1}{2} \int \frac{\lambda(\lambda - 2a)}{\lambda - a} dx \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

La solution de l'équation indéterminée (10) contient, donc, deux constantes arbitraires, A et B , et une fonction complètement arbitraire, $\lambda(x)$.

(2.1) L'équation (2) peut être traitée comme une équation ordinaire linéaire du deuxième ordre, dans laquelle $v(x)$ est une fonction inconnue et $f(x)$ un paramètre.

Cette équation est résoluble par quadratures quand, en vertu de (11)

$$f(x) = \frac{B}{(\lambda - a)^{1/2}} \exp \frac{1}{2} \int \frac{\lambda(\lambda + 2a)}{\lambda - a} dx.$$

Son intégrale générale est dans ce cas

$$v = v_1 \left(c_1 + c_2 \int \frac{e^{2ax}}{v_1^2} dx \right),$$

où, en vertu de (11)

$$v_1 = \frac{A}{(\lambda - a)^{1/2}} \exp \frac{1}{2} \int \frac{\lambda^2}{\lambda - a} dx.$$

Littérature

- [1] M. R. GRAN OLSSON, Ingenieur-Archiv 5 (1934), S. 363—373. Berlin.
- [2] D. MITRINOVITCH, Sur l'équation différentielle d'un problème de technique étudié par M. R. Gran Olsson, Kgl. norske vid. selskals forhandl. 28 (1956), No. 31, S. 171—175.
- [3] M. PETROVITCH, Un algorithme différentiel et ses applications. Éditions spéciales de l'Académie des Sciences, 111. Belgrade 1936.

Verfasser: Prof. I. BANDIĆ, Viša pedagoška škola, Belgrad/Jugoslavien, Đusanova 13

Über die partiellen Ableitungen der von Kármán-Tsienschen Potentiale

Einleitung

1932 hat VON KÁRMÁN [1] das axiale Strömungspotential an einem Drehkörper mit Überschallgeschwindigkeiten in der Form:

$$\varphi_0(x, r) = - \int_0^{x-\beta r} \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2}} \quad (1),$$

$$f(0) = 0, \quad \beta = \sqrt{M^2 - 1},$$

angegeben, wobei x die axiale, r die radiale Variable, $f(\xi)$ die Quelle, M die MACHzahl bezeichnen.

Sechs Jahre darauf entwickelte TSIEN [2] den Ausdruck:

$$\varphi_1(x, r) = \frac{1}{\beta r} \int_0^{x-\beta r} \frac{(x-\xi) g(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2}} \quad (2)$$

für das Potential der Querströmung, wobei $g(\xi)$ die Doppelquelle bedeutet, für welche $g(0) = 0$ ist.

Sowohl (1) als auch (2) können als spezielle Fälle der RIEMANNschen Integrale:

$$\varphi_n(x, r) = \int_0^{x-\beta r} \frac{T_n\left(\frac{x-\xi}{\beta r}\right) g_n(x, x-\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2}} \quad (3)$$

aufgefaßt werden, wobei $T_n(t)$ das TSCHEBYSCHEFFsche Polynom von erster Art und n -tem Grade ist. Dabei bedeutet $g_n(x, x-\xi)$ einen Quellenfaktor, welcher durch Randbedingungen festzulegen ist und die Bedingung $g_n(x, x) = 0$ befriedigt.

Es ist leicht ersichtlich, daß die Funktionen $\varphi_n(x, r)$ auch in der folgenden Gestalt dargestellt werden können:

$$\varphi_n(x, r) = \int_{\beta r}^x \frac{T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right) g_n(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (4)$$

Die Funktionen $\varphi_n(x, r)$ spielen nicht nur in der Gasdynamik eine wichtige Rolle, sondern sind auch mathematisch sehr interessant. Daher wollen wir sie von KÁRMÁN-TSIENSche Potentiale nennen und ihre partiellen Ableitungen angeben.

TSCHEBYSCHEFFsche Polynome

Diese sind bestimmt durch die Formel:

$$T_n(t) = \frac{1}{2} [(t + \sqrt{t^2 - 1})^n + (t - \sqrt{t^2 - 1})^n] \quad (5)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Es ist leicht zu beweisen, daß sie der folgenden Rekursionsformel genügen:

$$\frac{n T_n(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{t T_n(t) - T_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{T_{n+1}(t) - T_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] \quad (6)$$

Multipliziert man den Faktor $(t \pm \sqrt{t^2 - 1})^2$ aus, so erhält man auch die Beziehung:

$$T_n(t) = 2t T_{n-1}(t) - T_{n-2}(t) \quad (7)$$

Formeln (6) und (7) sind sehr nützlich für die Gewinnung der partiellen Ableitungen der von KÁRMÁN-TSIENSchen Potentiale $\varphi_n(x, r)$.

Ableitungen für eine allgemeinere Klasse von Integralen

Es seien $F(t)$ eine Funktion von t und $g(x, y)$ eine Funktion von x und y , die die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

1. $g(x, x) = 0$,
2. die ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$$

sind vorhanden,

3. die folgenden Integrale sind konvergent:

$$\int_{\beta r}^x \frac{F\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}}, \quad \int_{\beta r}^x \frac{F\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}}$$

Wir wollen das Integral

$$\varphi(x, r) = \int_{\beta r}^x \frac{F\left(\frac{y}{\beta r}\right) g(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (8)$$

betrachten und den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. Es sei $\varphi(x, r)$ durch (8) gegeben, wobei die Funktionen F und g die Bedingungen 1. 2. 3. erfüllen. Dann sind die ersten partiellen Ableitungen von φ durch die folgenden Integrale dargestellt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int_{\beta r}^x \frac{F\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \beta \int_{\beta r}^x \frac{\frac{y}{\beta r} F\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (10)$$

Daß (9) richtig ist, folgt unmittelbar durch Differentiation von (8) nach x unter Berücksichtigung der Voraussetzung 1.

Zum Beweis von (10) bemerken wir, daß man hier den endlichen Teil des divergenten Integrals zu Hilfe nehmen kann. Doch, wie in dieser Arbeit gezeigt wird, kommt man viel schneller, einfacher und sogar mit geringeren Voraussetzungen zum Ziele, wenn man folgendermaßen verfährt.

Es sei

$$y = \beta r t \quad (11)$$

Dann geht (8) über in

$$\varphi(x, r) = \int_1^{\frac{x}{\beta r}} \frac{F(t) g(x, \beta r t) dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \quad (12)$$

Nach Differentiation von (12) nach r ergibt sich sofort:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{x}{r} \frac{F\left(\frac{x}{\beta r}\right) g(x, x)}{\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}} + \beta \int_1^{\frac{x}{\beta r}} \frac{t F(t) \frac{\partial}{\partial \beta r t} g(x, \beta r t) dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \quad (13)$$

Das erste Glied der rechten Seite ist Null nach Voraussetzung 1. Das zweite ist aber vermittels (11) mit dem Integral von (10) identisch. Damit haben wir Satz 1 bewiesen.

Ableitungen für die von KÁRMÁN-TSIENSchen Potentiale

Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $g_n(x, y)$ die Bedingungen 1., 2., 3. erfüllen, haben wir sofort für

$$F(t) = T_n(t), \quad g(x, y) = g_n(x, y) \quad (14)$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \int_{\beta r}^x \frac{T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial x} g_n(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = \beta \int_{\beta r}^x \frac{\frac{y}{\beta r} T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial y} g_n(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (16)$$

Benutzt man die Eigenschaften (6) und (7) von $T_n(t)$, so folgt unmittelbar der folgende Satz:

Satz 2: Für die ersten Ableitungen von φ_n gelten die Beziehungen:

$$\left[r \frac{\partial}{\partial r} - (n-1) \right] \varphi_{n-1} = \beta r \int_{\beta r}^x \frac{T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial y} g_{n-1}(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (17),$$

$$\left[r \frac{\partial}{\partial r} + (n+1) \right] \varphi_{n+1} = \beta r \int_{\beta r}^x \frac{T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial y} g_{n+1}(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (18).$$

Beweis von (17). Von (16) ist

$$\begin{aligned} \left[r \frac{\partial}{\partial r} - (n-1) \right] \varphi_{n-1} &= \int_{\beta r}^x \frac{\frac{y}{\beta r} T_{n-1}\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial}{\partial y} g_{n-1}(x, y) dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{\beta r}\right)^2 - 1}} \\ &\quad - (n-1) \int_{\beta r}^x \frac{T_{n-1}\left(\frac{y}{\beta r}\right) g_{n-1}(x, y) \frac{dy}{\beta r}}{\sqrt{\left(\frac{y}{\beta r}\right)^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Wenn in (6) n durch $n-1$ ersetzt wird, kann das zweite Integral folgendermaßen geschrieben werden:

$$- \int_{\beta r}^x d \left[\frac{\frac{y}{\beta r} T_{n-1}\left(\frac{y}{\beta r}\right) - T_{n-2}\left(\frac{y}{\beta r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{\beta r}\right)^2 - 1}} \right] g_{n-1}(x, y).$$

Dieses geht durch partielle Integration über in

$$\int_{\beta r}^x \frac{\frac{y}{\beta r} T_{n-1}\left(\frac{y}{\beta r}\right) - T_{n-2}\left(\frac{y}{\beta r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{\beta r}\right)^2 - 1}} \frac{\partial}{\partial y} g_{n-1}(x, y) dy.$$

Hiernach ergibt sich sogleich

$$\begin{aligned} \left[r \frac{\partial}{\partial r} - (n-1) \right] \varphi_{n-1} &= \int_{\beta r}^x \frac{\left[2 \frac{y}{\beta r} T_{n-1}\left(\frac{y}{\beta r}\right) - T_{n-2}\left(\frac{y}{\beta r}\right) \right] \frac{\partial}{\partial y} g_{n-1}(x, y) dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{\beta r}\right)^2 - 1}}, \end{aligned}$$

welches sich auf (17) zurückführen läßt, wenn man Formel (7) heranzieht.

Beweis von (18). Aus (6) folgt durch partielle Integration und unter Berücksichtigung von $g_{n+1}(x, x) = 0$,

$$\begin{aligned} (n+1) \varphi_{n+1} &= \int_{\beta r}^x d \left[\frac{\frac{y}{\beta r} T_{n+1}\left(\frac{y}{\beta r}\right) - T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{\beta r}\right)^2 - 1}} \right] g_{n+1}(x, y) \\ &= \int_{\beta r}^x \frac{T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right) - \frac{y}{\beta r} T_{n+1}\left(\frac{y}{\beta r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{\beta r}\right)^2 - 1}} \frac{\partial}{\partial y} g_{n+1}(x, y) dy. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar Formel (18).

Aus (17) und (18) erkennt man durch wiederholte Anwendung des in der linken Seite stehenden Operators die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Satz 3. Für die zweite Ableitung von φ_n nach r gelten:

$$\begin{aligned} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - n \right) \left[r \frac{\partial}{\partial r} - (n-2) \right] \varphi_{n-2} &= \beta^2 r^2 \int_{\beta r}^x \frac{T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_{n-2}(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (19) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + n \right) \left[r \frac{\partial}{\partial r} + (n+2) \right] \varphi_{n+2} &= \beta^2 r^2 \int_{\beta r}^x \frac{T_n\left(\frac{y}{\beta r}\right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_{n+2}(x, y) dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2 r^2}} \quad (20), \end{aligned}$$

vorausgesetzt, daß $\left[\frac{\partial}{\partial y} g_n(x, y) \right]_{y=x}$ verschwindet.

Schlußbemerkung

Formeln (17), (18), (19) und (20) sind sehr wichtig für die Integration der gekoppelten Strömungsgleichungen für Drehkörper mit Überschallgeschwindigkeiten. Es ist nur durch die obigen Formeln möglich, die verschiedenen Ableitungen von φ_{n-2} , φ_{n-1} , φ_n , φ_{n+1} , φ_{n+2} durch Integrale mit demselben TSCHEBYSCHEFFSchen Polynom, $T_n(t)$, auszudrücken [3]. Diese Eigenschaft ermöglicht die Lösung der Randwertaufgabe des Drehkörpers, welche bisher nicht einmal annäherungsweise befriedigt werden konnte.

Literatur

- [1] V. KÁRMÁN, TH., and MOORE, N.B., The Resistance of Slender Bodies Moving with Supersonic Velocities with Special Reference to Projectiles, Transactions of American Society of Mechanical Engineers, Vol. 54 (1932), pp. 303-310.
- [2] TSIEN, N. S., Supersonic Flow over an Inclined Body of Revolution, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 5 (1938), No. 12, pp. 480-483.
- [3] LI, TA, Coupled Potential Flow past Inclined Bodies of Revolution at High Speeds, Applied Research Series No. 1, Convair-Astronautics, San Diego 1959.

Verfasser: Dr. TA LI, Convair Astronautics, Division of General Dynamics Corporation, San Diego 12, California, USA

Beziehungen zwischen Defektaberschätzungen und 'Linear programming' bei linearen Gleichungssystemen

Der Einfluß von Abrundungsfehlern kann bekanntlich bei der Lösung linearer Gleichungssysteme

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = r_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

oder in Matrizenform

$$Ax = r \quad (|A| \neq 0, \text{ Lösung } x_0) \quad (1)$$

sehr unangenehme Auswirkungen haben.

Die zahlreichen bekannten Fehlerabschätzungen wie z. B. für die Iteration in Gesamtschritten:

$$x_m = B x_{m-1} + r \quad (m = 2, 3, \dots; B = E - A = (b_{jk}); \\ E = \text{Einh. matrix};$$

(s. [3], dort auch weitere Literaturangaben).

$$\left. \begin{aligned} |x_0 - x_m| &\leq \frac{K}{1-K} |x_m - x_{m-1}| \\ \text{im Falle } K &= \max_j \sum_{k \neq j} |b_{jk}| < 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

oder für beliebige Näherungen y mit dem Defekt $d = A y - r$ (s. [2], [4] u. [6])

$$|x_0 - y| \leq \frac{|d|}{|A|}, \quad |A| = |\sqrt{\kappa_{A'A}}|_{\min} \quad (3).$$

(Insbesondere für die obige Iterationsvorschrift hat man einzusetzen

$$y = x_m$$

und

$$|d| = |x_m - B x_m - r| = |B(x_m - x_{m-1})|$$

sind daher von grundsätzlichem Interesse. Leider liefern sie nicht immer befriedigende Resultate.

Wir beschreiben eine Variante dieser Abschätzungen, die oft bessere Ergebnisse liefert, deren geschlossene Auswertung allerdings langwierig ist, da an die Stelle der Ermittlung bzw. Abschätzung von $|A|$ die Ermittlung bzw. Abschätzung der Minimalwerte gewisser 'linearer Programmierprobleme' tritt. Die Mitteilung soll daher nur den Zusammenhang aufzeigen; für die konkrete Fehlerabschätzung dürfte der angegebene Weg i. a. zu umständlich sein.

Es sei y eine Näherung für die Lösung

$$x_0 = y + \frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|} \quad (4)$$

des Problems (1). Als Norm wählen wir

$$\|x\| = \max_j |x_j| \quad (j = 1, \dots, n).$$

Einsetzung in (1) ergibt

$$d = -\|x_0 - y\| \cdot A \cdot z_0$$

mit

$$z_0 = \frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|}; \quad \|z_0\| = 1.$$

Durch Übergang zur Norm finden wir bei beliebigem normiertem z die Abschätzung

$$\|x_0 - y\| = \frac{|d|}{|A z_0|} \leq \frac{|d|}{N} \quad \text{mit} \quad N = \min_{\|z\|=1} |A z| \quad (5).$$

(Der Betrag als Norm hätte (3) ergeben!)

Zur Ermittlung des Nenners

$$N = \min_{\|z\|=1} \max_j |(A z)_j|;$$

$$(A z)_j = j\text{-te Komponente von } A z \quad (j = 1, \dots, n)$$

denken wir uns eine Komponente von z herausgegriffen und gleich $+1$ oder -1 gesetzt. Das geht auf $2n$

Arten. Die verbleibenden Komponenten von z fassen wir zu dem Vektor $u = (u_{(v)})$ ($v = 1, \dots, n-1$) zusammen; dann wird bei Zusammenfassung der Absolutglieder zum Vektor $-t$:

$$A z = C u - t; \quad t = (t_{(j)}).$$

Die Matrix C hat n Zeilen und $n-1$ Spalten. Für das herausgegriffene Problem sei

$$v_{(n)} = \min_{|u_{(v)}| \leq 1} \max_j |(C u - t)_{(j)}| \quad (v = 1, \dots, n-1, \\ j = 1, \dots, n).$$

Mit $0 \leq u_{(v)} + 1 = v_{(v)} \leq 2$ können wir dann auch schreiben

$$0 \leq \left| \sum_{v=1}^{n-1} c_{jv} u_{(v)} - t_{(j)} \right| = \left| \sum_{v=1}^{n-1} c_{jv} v_{(v)} - q_{(j)} \right| \leq v_{(n)}$$

mit

$$q_{(j)} = \sum_{v=1}^{n-1} c_{jv} + t_{(j)}$$

oder gleichwertig

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v=1}^{n-1} c_{jv} \cdot v_{(v)} - v_{(n)} &\leq q_{(j)} \\ - \sum_{v=1}^{n-1} c_{jv} \cdot v_{(v)} - v_{(n)} &\leq -q_{(j)} \\ 0 \leq v_{(v)} &\leq 2 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} v_{(n)} &= \min_{(v_{(n)} \geq 0)} \\ (v = 1, \dots, n-1) \\ (j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (6).$$

Mit 'slack-Variablen' läßt sich dieses Problem in der üblichen Weise auf das Standard-Problem der linearen Programmierung zurückführen und etwa nach DANTZIG mit der Simplex-Methode lösen (z. B. [5], S. 22 ff. und S. 50 ff.).

Führen wir diese Rechnung für alle $2n$ Probleme durch, so mögen die Lösungen $v_{(n)}^\mu$ ($\mu = 1, \dots, 2n$) sein. Damit erhalten wir

$$N = \min_{\mu} v_{(n)}^\mu \quad (7).$$

Beispiel:

Für

$$\begin{aligned} x_{(1)} - x_{(2)} &= 4,8 \\ x_{(1)} + 5 x_{(2)} &= 5,4 \end{aligned} \quad (\text{Lösung } x'_0 = (4,9; 0,1))$$

soll die Näherung $y_{(1)} = 5, y_{(2)} = 0,1$ getestet werden. Man findet nach kurzer Rechnung

$$|A| = \sqrt{14 - 4\sqrt{10}} > 1,16; \quad N = 1; \quad d' = (0,1; 0,1),$$

d. h. (3) ergibt für $j = 1, 2$

$$|x_{(j)0} - y_{(j)}| \leq |x_0 - y| \leq 0,122,$$

während (5) auf

$$|x_{(j)0} - y_{(j)}| \leq 0,1$$

führt. Die zweite Abschätzung liefert also streng den maximalen Fehlerbetrag.

Eine auf nichtlineare Programmierung führende Abschätzung wird in [1] beschrieben.

Literatur

- [1] G. BERTRAM, Ein Fehlerabschätzungsprinzip für Operatoren-gleichungen. (In Vorbereitung).
- [2] L. COLLATZ, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig 1949 (2. Aufl.).
- [3] L. COLLATZ, Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis, Zeitschr. f. angew. Math. u. Physik IV (1953), S. 327 — 357.
- [4] L. COLLATZ, Zur Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen, ZAMM 34 (1954), S. 71—72.
- [5] S. I. GASS, Linear Programming, New York/Toronto/London 1958.
- [6] H. WITTMAYER, Einfluß der Änderung einer Matrix auf die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems, sowie auf die charakteristischen Zahlen und die Eigenvektoren, ZAMM 16 (1936), S. 287—300.

Verfasser: Dozent Dr. G. BERTRAM, Hamburg 39, Krohnskamp 72

Elliptic Punch on a Half Space

Introduction

Despite the fact that the analogy of the punch problem with the potential problem of a perfectly conducting disc is well-known [1], the solution to the problem of half space punched by a flat elliptic cylinder does not seem to be easily available in the literature. GALIN [2] has given the solution to this problem in terms of ellipsoidal functions but he does not derive the expressions for stresses in the half space. Here explicit expressions are obtained for stresses and strains at any point in the medium.

Solution

KELLOGG [3] has derived expression for potential in space of a perfectly conducting ellipsoid which is kept at uniform potential. According to him potential V' is given by

$$V' = \frac{E}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{[(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)]^{1/2}} \quad (1),$$

at any point outside the ellipsoid and

$$V' = \frac{E}{2} \int_0^{\lambda} \frac{ds}{[(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)]^{1/2}} \quad (2),$$

on the surface of the ellipsoid, where λ is the largest root of

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad \dots (3).$$

a, b, c are the semi-principal axes of the ellipsoid and E is the total charge on the ellipsoid. It is also noticed

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial x} &= P \int_z^{\infty} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{1}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda]^{1/2}} dz = P \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{1}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda]^{1/2}} d\lambda, \\ &= P \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\lambda x}{z(a^2 + \lambda)} \frac{1}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda]^{1/2}} d\lambda = P x \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda) - x^2(b^2 + \lambda) - y^2(a^2 + \lambda)]^{1/2}} \\ &= -\frac{P}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln |2x\sqrt{a^2 - b^2} - (a^2 - b^2 + x^2 + y^2)| \\ &\quad + \frac{P}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left| \frac{2x\sqrt{a^2 - b^2}[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda) - x^2(b^2 + \lambda) - y^2(a^2 + \lambda)]^{1/2}}{a^2 + \lambda} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2x^2(a^2 - b^2)}{a^2 + \lambda} - (a^2 - b^2 + x^2 + y^2) \right| \quad \dots (11). \end{aligned}$$

there that charge distribution q is given by

$$q = \frac{E}{4\pi(\mu\nu)^{1/2}} \quad \dots (4),$$

where μ and ν are the other two roots of (3).

If we put $c = 0$ the potential due to a perfectly conducting elliptic disc is obtained as

$$V' = \frac{E}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{[(a^2 + s)(b^2 + s)s]^{1/2}} \quad \dots (5),$$

while the charge distribution q becomes

$$q = \frac{E}{4\pi ab \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}} \quad \dots (6).$$

From the usual analogy it follows that the distribution of σ_z below the cylinder is given by

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi ab \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}} \quad \dots (7),$$

where $P = \frac{E}{2}$ is the total load on the cylinder.

Also we define for the elastic case: $V = \frac{V'}{2}$

For the complete solution of the problem, we must evaluate the first and second x and y partial derivatives of Y , where

$$Y = \frac{P}{2\pi ab} \iint \frac{dx' dy'}{\left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right)^{1/2}} \ln(z + r) \quad (8),$$

where $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$

x, y, z = the co-ordinates of any point in the field
 x', y' = the co-ordinates of any point on the loaded area on $z = 0$

and the range of integration is the loaded area on $z = 0$.

One has

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{P}{2\pi ab} \iint \frac{dx' dy'}{\left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right)^{1/2}} \frac{1}{r}, \\ &= P \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{[(a^2 + s)(b^2 + s)s]^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

In view of the fact that $Y \rightarrow 0$ as $z \rightarrow \infty$, one gets

$$Y = -P \int_z^{\infty} dz \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{[(a^2 + s)(b^2 + s)s]^{1/2}} \quad (10),$$

Also

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = P \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{1}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda]^{1/2}} d\lambda \quad (12),$$

which may be similarly evaluated.

The higher derivatives of Y may now be obtained by simple differentiation.

The stresses and strains at any point in the medium may be obtained by substitution in the following equations [4]:

$$u = \frac{-1}{4\pi\mu} \left[(1 - 2\nu) \frac{\partial Y}{\partial x} + z \frac{\partial V}{\partial x} \right] \quad \dots (13),$$

$$v = \frac{-1}{4\pi\mu} \left[(1 - 2\nu) \frac{\partial Y}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial y} \right] \quad \dots (14),$$

$$w = \frac{1}{4\pi\mu} \left[2(1 - \nu) V - z \frac{\partial V}{\partial z} \right] \quad \dots (15),$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2\nu} \left[2\nu \frac{\partial V}{\partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] \quad (16),$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left[2\nu \frac{\partial V}{\partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] \quad (17),$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] \dots \dots \dots (18),$$

$$\tau_{yz} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \quad (19),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2\pi} \left[(1-2\nu) \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right] \dots (20),$$

where μ is the shear modulus and ν , the Poisson's ratio of the material.

For purpose of illustration, we shall calculate the value of σ_z on the axis of the cylinder and the indentation w_0 in terms of the load P .

Substitution from (5) in (18) gives for points on the axis of the cylinder,

$$(\sigma_z)_{x=y=0} = -\frac{P(a^2+z^2)(b^2+z^2) + (b^2+z^2)z^2 + (a^2+z^2)z^2}{2\pi [(a^2+z^2)(b^2+z^2)]^{3/2}} \quad (21).$$

Also the indentation w_0 of the cylinder is, from (15),

$$w_0 = \frac{1-\nu}{4\pi\mu} V'_0 \dots \dots \dots (22),$$

where V'_0 is the potential at the disc.

From (2) this gives

$$w_0 = \frac{1-\nu}{4\pi\mu} P \int_0^\infty \frac{ds}{[(a^2+s)(b^2+s)s]^{1/2}}.$$

Putting $a=1$, $s = \cot^2 \varphi$, we get

$$w_0 = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} P \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1-(1-b^2)\sin^2 \varphi]^{1/2}} = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} P E(\sqrt{1-b^2}) \dots \dots \dots (23).$$

Tables 1 and 2 give the values of σ_z and w_0 . The load P is in each case adjusted so as to be proportional to the area of the base. The stress σ_z is in units of $\frac{P}{2\pi}$ and w_0 in units of $\frac{(1-\nu)P}{2\pi\mu}$.

Table 1

z	$\sigma_z (b=1)$	$\sigma_z (b=.8)$	$\sigma_z (b=.5)$	$\sigma_z (b=.2)$
.1	1.0097	1.0128	1.0229	1.0768
.2	1.0355	1.04384	1.07105	1.0667
.3	1.0689	1.08136	1.1065	.94298
.4	1.09988	1.1104	1.10795	.80466
.5	1.12	1.12322	1.07515	.68496
.6	1.1245	1.0891	—	—
1	1.00	.93195	.72735	.34136
1.5	.73372	.64485	.4547	.1961
2	.52	.44213	.2973	.12416
3	.28	.23088	.14935	.0609
4	.16955	.13805	.0880	.03558

Table 2
Indentation w_0

$b=1$	1.50708
$b=.8$	1.401986
$b=.5$	1.07826
$b=.2$.60384

Observation: One notices that the indentation is maximum in the case of a circular cylinder as also is the maximum stress σ_z developed in the medium along the axis of the cylinder.

Acknowledgment

The results reported in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Office of Naval Research under contract 591(11) with Rensselaer Polytechnic Institute.

References

- [1] See for ex. GREEN, A. E. and ZERNA, W., Theoretical Elasticity p. 173 (1954).
- [2] GALIN, L. A., Contact Problems in the Theory of Elasticity (in Russian) Moscow, (1953).
- [3] KELLOGG, O. D., Foundations of Potential Theory (1953).
- [4] DERESIEWITCH, H., The half space under pressure distributed over an elliptic portion of its plane boundary. Forthcoming publication.

Verfasser: B. D. AGGARWALA, Department, of Mechanics, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. L. Föppl und Dr. E. Mönch, Praktische Spannungsoptik. Zweite, neubearb. Aufl. XI + 209 S. m. 163 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 30,— DM.

Gegenüber der ersten Auflage hat dieses Buch über „Praktische Spannungsoptik“ zum großen Teil eine Neubearbeitung erfahren, um einerseits Überholtes und Veraltetes zu streichen und andererseits den Fortschritten auf diesem Gebiet Genüge zu tragen. Da der Erfolg spannungsoptischer Arbeiten wesentlich von der Güte des Modellwerkstoffes abhängt, sind gerade in den letzten zehn Jahren neue Kunststoffe entwickelt und erprobt worden, so daß sich hier ganz besonders merkwürdige Fortschritte abzeichnen. Aus diesem Grunde sind in der 2. Auflage die Abschnitte über die Verwendung des Phenolformaldehyds ganz weggefallen und haben dafür neue Modellwerkstoffe, wie insbesondere das Äthoxilinharz (ARALDIT), eine eingehende Schilderung erfahren.

Dieses Buch dürfte für den konstruktiv schaffenden Ingenieur von großem Nutzen sein. Hier kann sich

der Ingenieur nach einem Studium der Grundlagen der Spannungsoptik das praktische Wissen aneignen, um die verschiedenen Festigkeitsaufgaben zu behandeln. Auch können alle diejenigen, die sich in einem Forschungslaboratorium mit Spannungsdoppelbrechung beschäftigen, dieses Werk als Ratgeber benutzen. Ferner dürften besonderes an Spannungsoptik interessierte Studenten der höheren Semester hier eine Einführung in dieses Gebiet finden. Es bleibt zu hoffen, daß mit diesem empfehlenswerten Buch die Spannungsoptik mehr Eingang in Technik und Wissenschaft in Deutschland finden möge, da in den USA, der Sowjetunion und Großbritannien viel mehr als bei uns von der spannungsoptischen Methode Gebrauch gemacht wird.

Neben der eingehenden Wiedergabe der ebenen Spannungsoptik, die schon seit mehreren Jahrzehnten zu den gesicherten Grundlagen gehört, hat der dreidimensionale spannungsoptische Versuch, insbesondere das Einfrierverfahren eine umfassende Schilderung erfahren. Hierzu gehören die Technik der

Modellherstellung und die optische Auswertung der „eingefrorenen“ Spannungen in den Modellschnitten.

Weiterhin ist aufgezeigt, wie man die am Modell gewonnenen Ergebnisse auf die Hauptausführung übertragen kann (Ähnlichkeitsgesetze).

Einem weiteren Abschnitt sind die speziellen Verfahren der Spannungsoptik vorbehalten. Da man bei einem ebenen spannungsoptischen Versuch lediglich nur die Hauptspannungsdifferenzen messen kann, sind verschiedene Verfahren aufgezählt, mit denen auch eine getrennte Bestimmung der einzelnen Hauptspannungen möglich wird. Auch wurden noch Verfahren für Platten- und Schalenuntersuchungen und zur Analyse dynamischer Spannungszustände angegeben. Schließlich finden noch die neuen Arbeiten über Photoplastizität Erwähnung, wo es sich um den Zusammenhang zwischen der optischen Doppelbrechung und dem plastischen Verformungszustand handelt.

Wie in der 1. Auflage haben verschiedene neue Anwendungen der Spannungsoptik, die von den Autoren selbst durchgeführt bzw. geleitet worden sind, in der neuen Auflage Eingang gefunden, wodurch die Nützlichkeit der Spannungsoptik bei technischen Problemen besonders zum Ausdruck gekommen ist.

Erkner b. Berlin

H. SCHWIEGER

Dr. E. Eckert, Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. Zweite, überarbeitete Aufl. XI + 295 S. m. 171 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 28,80 DM.

Die 1. Auflage des ECKERTSchen Lehrbuches erschien bereits im Jahre 1949. Hervorgegangen aus Vorlesungen des Verfassers an der Technischen Hochschule in Braunschweig, füllte es damals eine merkwürdige Lücke im Fachschrifttum aus, zumal das Buch von MERKEL über die Grundlagen der Wärmeübertragung dem neuesten Stand auf diesem sich rasch entwickelnden Fachgebiet inzwischen nicht mehr entsprach. Das galt insbesondere für den Teil des MERKELSchen Buches, der sich mit den Vorgängen des Wärmeüberganges beschäftigte. Hier vor allem mußte der Anschluß an den modernen Stand der Entwicklung gefunden werden. Und das ist ECKERT in jeder Weise gelungen. Ausgehend von den klassischen Grundlagen der PRANDTLschen Grenzschichttheorie, führt er den Leser durch eine geschickt getroffene Stoffauswahl in didaktisch ausgezeichnete Weise in dieses nicht immer einfach zu überschauende Grenzgebiet zwischen Thermodynamik und Strömungslehre ein. Dieser Abschnitt stellt seinem Umfang nach den Hauptteil des Buches dar, wobei das in der 2. Auflage neu hinzugekommene Kapitel III E über Sonderprobleme erzwungener Konvektion, in dem u. a. auch auf solche interessanten Vorgänge wie die Film- und Schmelzkühlung kurz eingegangen wird, auf das besondere Interesse des Lesers stößt.

Aber auch der Hauptabschnitt II, der den Vorgängen der Wärmeleitung gewidmet ist, wurde überarbeitet und straffer gegliedert. Neu aufgenommen wurden hier u. a. die Abschnitte über das Relaxationsverfahren und das Thermometerproblem. Praktisch unverändert geblieben sind die Hauptabschnitte IV und V über die Wärmestrahlung und den Stoffaustausch. Gerade aber dieser letzte Abschnitt hätte eine Überarbeitung mit dem Ziel einer etwas ausführlicheren Stoffdarbietung durchaus vertragen, um dem gewählten Buchtitel inhaltlich besser als bisher gerecht zu werden. Mit dieser Feststellung soll jedoch der Wert dieses sonst ausgezeichneten Lehrbuches keineswegs gemindert werden. Es wird nach wie vor all denen ein guter und zuverlässiger Leitfaden sein, die sich mit Fragen der Wärmeübertragung zu befassen haben, sei es während der Ausbildung auf der

Hochschule oder in der beruflichen Praxis. Im Unterschied zur 1. Auflage, die bezüglich der Ausstattung noch unter den Schwierigkeiten der Nachkriegsjahre litt, läßt die 2. Auflage in dieser Beziehung jetzt keinen Wunsch mehr offen.

Dresden

N. ELSNER

Dr. K. Iserland, Untersuchungen über die Umlenkung eines freien Luftstrahls mit Hilfe von Drall. (Mitt. aus d. Inst. f. Aerodyn. an d. ETH Zürich, Nr. 25.) 99 S. m. 48 Abb. Zürich 1958. Verlag Leemann. Preis 21,00 Fr.

Das Problem der Schubumkehr von Strahltriebwerken zum Zwecke der Landebremmung von Flugzeugen hat eine Reihe verschiedener technischer Lösungen gefunden. Vom aerodynamischen Standpunkt ist eine der elegantesten die Umlenkung des Strahles durch ein Ringgitter nach vorheriger Einleitung eines Dralles mit Hilfe eines verstellbaren Leitapparates. Der Verfasser legt im Anschluß an einen bereits 1953 erschienenen Artikel nach einem allgemeinen Vergleich der Strahlbremse mit der Radbremse und dem Bremsfallschirm an Hand reichhaltigen Versuchsmaterials die Ursachen für das besondere Verhalten des mit Drall umgelenkten Strahls dar.

Das wesentliche Merkmal der Strahlumlenkung mit Drall besteht in der plötzlichen und vollständigen Umlenkung des Strahls bei Erreichung eines gewissen Dralles. In diesem Moment sinkt der Gesamtdruck im Strahlkern unter den statischen Außendruck; es dringt Umgebungsluft in den Kern; der bisher zylindrische Vollstrahl geht ruckartig in einen sich konisch erweiternden Ringstrahl über. Dieser gerät vollständig in die Umlenkringe, wobei der Schub des Strahls sprunghaft von positiven auf negative Werte wechselt. Die Ausbildung des Ringstrahles ermöglicht auch eine Umlenkung ohne Ringgitter, allein durch Absaugung an der wulstförmig ausgebildeten Düsenhinterkante. Dabei sinkt der erforderliche Drallwinkel mit zunehmender Absaugmenge.

Die vom Autor durchgeführten Untersuchungen erfassen die Einflüsse einer größeren Reihe von Versuchsparametern, so daß ein sehr abgerundetes Bild des behandelten Problems geboten wird. Das Heft dürfte über seinen ursprünglichen Zweck der Klärung einer für die Luftfahrttechnik wesentlichen Erscheinung hinaus auch für das grundsätzliche Studium der Strömungsmechanik von Freistrahlen wertvoll sein.

Dresden

G. CORDS

Dr. L. Meyer, Singularitätentheorie der Flügelgitter (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH in Zürich, Nr. 26). 127 S. m. 64 Abb. sowie 10 Rechen- und 4 Zahlentabellen. Zürich 1959. Verlag Leemann. Preis brosch. 28,— SFr.

Die Arbeit behandelt die Berechnung ebener Schaufelgitter in reibungsloser inkompressibler Strömung. Für eine gegebene Strömung werden Gitteranordnung und Profilform gesucht.

Nach der ACKERETSchen Gittertheorie wird mit Hilfe von Singularitäten zunächst die Parallelströmung für unendlich kleine Schaufelteile berechnet und dann für die Zuströmrichtung mit stoßfreiem Eintritt die endliche Teilung profilierter Schaufeln in Zusatzgliedern berücksichtigt. Dabei werden die Singularitäten auf Stromlinien (die ungefähr den Skelettlinien der Profile entsprechen) angebracht. Die Änderung für vom stoßfreien Eintritt abweichende Zuströmrichtungen wird durch die Überlagerung eines zusätzlichen Strömungsfeldes gewonnen.

Ein Rechenschema mit Hilfsdiagrammen erleichtert die Anwendung des Verfahrens. Mit einer Tischrechenmaschine läßt sich ein Beispiel für stoßfreien Eintritt in etwa 25 Stunden rechnen. Umfangreichere Untersuchungen sind nur mit programmgesteuerten Rechenautomaten zu bewältigen. Der Gang einer solchen Rechnung wird erläutert. Für eine vorgegebene günstige Druckverteilung läßt sich die Profilform nach dem gleichen Schema durch Iteration ermitteln.

Die Brauchbarkeit des Verfahrens ist durch Vergleichsmessungen im elektrischen Trog belegt. Auch für größere Umlenkung in stark gestaffelten Gittern aus dünnen Profilen ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment recht gut.

Oberh.-Sterkrade

J. REHBACH

Prof. Dr. K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Teil II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. Fünfte Aufl. (Slg. Götschen, Bd. 878). 151 S. Berlin 1959. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 2,40 DM.

Der Aufgaben- und Lösungstext der vorliegenden fünften Auflage stimmt wörtlich mit demjenigen der dritten Auflage aus dem Jahre 1944 überein, und zwar einschließlich sämtlicher Zitate. Lediglich einige hinzugekommene Druckfehler — hauptsächlich in Formeln — sind zu verzeichnen, die jedoch die bekannte Aufgabensammlung nicht wesentlich beeinträchtigen.

Dresden

H. WENZEL

Dr. W. Krull, Elementare und klassische Algebra. II. Band. (Slg. Götschen, Bd. 933.) 132 S. Berlin 1959. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 2,40 DM.

Handelt der erste Teil dieses Werkes (Sammlung Götschen 930) von der klassischen elementaren und höheren Algebra bis zum sog. Fundamentalsatz der Algebra, so hat der vorliegende zweite Teil die klassischen Ergebnisse der GALOISSchen Theorie und die Lösung des KLEINSchen Formenproblems zum Inhalt. Die Darstellung freilich ist durchaus modern in der Hervorhebung des jeweiligen Ausgangspunktes aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Strukturen.

Das erste Kapitel, Gruppentheorie, insbesondere Theorie der Abbildungsgruppen, gibt einen knappen Aufriss der Grundlagen der Gruppentheorie, soweit diese für das zweite Kapitel, GALOISSche Theorie, erforderlich sind. Dieses zweite Kapitel bringt in erstaunlicher Kürze die Hauptergebnisse der GALOIS-Theorie. Das dritte Kapitel ist dem wichtigen Berechnungsproblem und Homomorphiesätzen gewidmet. Das vierte Kapitel, Affine und projektive Darstellungen, Gleichungen 5. und 6. Grades, behandelt die darstellungstheoretische Lösung des Formenproblems von einem völlig neuen selbständigen Standpunkte aus. Das fünfte Kapitel schließlich handelt von den bizyklischen Gleichungen und den reellen Radialkörpern.

Dem Anfänger dürfte das Studium des kleinen, aber inhaltsreichen Bändchens einige Schwierigkeiten bereiten, der Kenner wird dem konzentriert und glänzend geschriebenen Werk manche wertvolle Anregung und viele neue Gesichtspunkte entnehmen können.

Erlangen

W. SPECHT

C. E. Pearson, Theoretical Elasticity (Harvard Monographs in Applied Science, Number 6.) 218 S. m. Abb. Cambridge 1959. Harvard University Press. Preis geb. \$ 6,—.

Das vorliegende Buch bringt eine zusammengefaßte Darstellung der Vorlesungen, welche der Verfasser an der Harvard-Universität für fortgeschrittene

Studenten gehalten hat. Es schließt insofern eine Lücke, als die Anwendung tensorieller Rechenmethoden in den Grundlagen der Elastizitätstheorie konsequent von der Herleitung der Vektor-Rechnung und den Grundrechnungsarten des absoluten Differentialkalküls her durchgeführt wird. Nach Einführung der Spannungs- und Deformationstensenoren werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie entwickelt und anschließend allgemeine Lösungsverfahren besprochen. Einen besonderen Platz nehmen die Variationsmethoden ein, welche ziemlich vollständig behandelt werden. Weitere Kapitel sind den Grundlagen der Thermoelastizität, dynamischen Problemen und nichtlinearen Elastizitätsproblemen gewidmet. In Anbetracht des verhältnismäßig geringen Umfanges des Buches müssen die Klarheit der Darstellung und die Reichhaltigkeit des Stoffes anerkannt werden.

München

H. NEUBER

Dr. P. Lorenz Anschauungsunterricht in Mathematischer Statistik. Band II: Der Schluß vom Teil aufs Ganze. Erster Teil. XI + 213 S. m. 27 Abb. Leipzig 1959. S. Hirzel Verlag. Preis geb. 18,60 DM.

Während Band I des Werkes ausschließlich der beschreibenden Statistik gewidmet war, befaßt sich Band II, Teil I, mit dem auf Wahrscheinlichkeitsrechnung fußenden „Schluß vom Teil aufs Ganze“. Verf. will ausdrücklich nicht die Zahl der häufig zu oberflächlicher, gedankenloser Test- und Schätz-Routine verleitenden Rezeptbücher vermehren, sondern dem Leser, auch dem höherer Mathematik unkundigen, die Schlußweise der stochastisch begründeten zufallskritischen Statistik erklären und ihm damit eine logisch einwandfreie Deutung seiner Ergebnisse ermöglichen. Zu diesem Zweck werden nur wenige Grundaufgaben (Beurteilung unbekannter Merkmalswahrscheinlichkeiten p , Varianzen σ^2 und Mittelwerte M_T) anhand geeigneter Zahlenbeispiele der Praxis veranschaulicht und gründlich durchdacht. Unter Zugrundelegung eines „physikalischen“, häufigkeitsinterpretierbaren Wahrscheinlichkeitsbegriffes und grundsätzlicher Vermeidung von Grenzübergängen und Grenzwertsätzen legt Verf., von den üblichen Darstellungen abweichend, Wert darauf, sämtliche Überlegungen im Endlichen, für endliche Stichproben aus endlichen Universa durchzuführen und die Prüfverteilungen (Normal-, χ^2 -, STUDENT-Verteilung) als im Endlichen geltende Näherungen für diskrete (meist aus Polynomverteilung hervorgehende) Verteilungen herzuleiten. Die entsprechenden, zur Schonung mathematiksscheuer Leser gesonderten, theoretischen Abschnitte und der Anhang greifen auf eigene Arbeiten zurück. Im Hinblick auf manche in logischer Hinsicht unbefriedigende, deutschsprachige Leitlinien vergleichbaren mathematischen Niveaus ist die saubere Trennung vom BAYES-Modell und die einwandfreie Deutung und Formulierung des Confidenzschlusses besonders anzuerkennen. Leider bleibt jedoch Verf. bei diesen Bemühungen auf halbem Wege stehen. Da er bei Untersuchung der Irrtumswahrscheinlichkeit nur Fehlentscheidungen 1. Art in Betracht zieht, empfiehlt er bei Vergleichen, d. h. Prüfung der zusammengesetzten Hypothese H_0 der Parametergleichheit zweier Universa, (im Sinne der NEYMAN-Theorie nicht optimale) Kriterien, die H_0 genau dann ablehnen, wenn die beiden aus unabhängigen Stichproben berechneten Confidenzbereiche des Parameters disjunkt sind; die grundsätzlichen Mängel dieses Verfahrens werden durch die mühsame Tabulierung der entsprechenden maximalen Irrtumswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Confidenzkoeffizienten („Überhangswahrscheinlichkeit“) \bar{u} der benutzten Mutungsbereiche (die, wie man direkt erkennt, allgemein $< 4 \bar{u} \cdot (1 - \bar{u})$ sein müssen) nicht

beheben (die Bezeichnung der Wertetabelle der Funktion $I(p)$ auf Seite 45 als „zweigipflige Verteilung“ ist wohl nur ein Lapsus). —

Wertvoll sind die umfangreichen Originaltabellen der Confidenzgrenzen für p bei Binomialverteilung; weitere Tabellen zur Bestimmung der Confidenzgrenzen für σ_U bzw. M_U beruhen auf modifizierten χ^2 - und STUDENT-Verteilungen. — Zweifellos wird das originelle Büchlein zum anschaulichen Begreifen und gründlichen Durchdenken bewährter Methoden anregen. Andererseits überwuchern die — zwar teilweise durchaus berechnete — Kritik am Vorhandenen und die ans Unwissenschaftliche grenzende, scharfe Polemik, die stellenweise weit über das Ziel hinausschießt, doch allzusehr das Positive. Ref. kann daher das Buch dem Neuling nur mit Vorbehalt empfehlen. —

Unter den vom Verf. genannten, ausschließlich deutschsprachigen Lehrbüchern vermißt man gerade die zuverlässigsten, allerdings mathematisch anspruchsvolleren von L. SCHMETTERER und M. FISZ. —

Im Einzelnen sei hier nur ein historischer Irrtum auf Seite 46 berichtigt: die oft nach GAUSS benannte Normalverteilung wurde bereits 1733/38 von A. DE MOIVRE zur Approximation der Binomialverteilung im Falle $p = 1/2$ eingeführt.

Bad Nauheim

M. P. GEPPERT

H. Parkus, Instationäre Wärmespannungen. V + 166 S. m. 34 Abb. Wien 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 38,— DM.

Das vorliegende Buch bildet eine Fortsetzung der umfassenden Darstellung der Theorie der Wärmespannungen (von MELAN und PARKUS), welche sich nur mit stationären Temperaturfeldern befaßt. Der Verfasser geht nunmehr auf nichtstationäre Temperaturfelder über und berücksichtigt außer den vollkommen elastischen Körpern auch visco-elastische und gemischt elasto-plastische Medien. Die Darstellung berücksichtigt in dankenswerter Weise die in der Literatur weit verstreuten Einzelarbeiten. Die Kapitel sind nach folgenden Gesichtspunkten geordnet: Allgemeine Sätze der Thermoelastizität, Anheiz- und Abkühlvorgänge, periodische Temperaturänderungen, bewegte Wärmequellen, dynamische Einflüsse, Wärmespannungen bei Visco-Elastizität, Wärmespannungen bei gemischt elasto-plastischem Verhalten. Stets sind nicht nur die zum Teil recht komplizierten mathematischen Formeln abgeleitet, sondern auch Zahlenbeispiele und Diagramme angegeben. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis und ein Sachverzeichnis ergänzen das Buch vorteilhaft. Nachdem die Entwicklung der Technik schon heute erkennen läßt, daß in Zukunft in vielen Gebieten, insbesondere im Reaktorbau, sowie im Flugzeug- und Raketenbau hohe Temperaturwechselbeanspruchungen zu erwarten sind, wird das Buch sicher in weiten Kreisen Interesse finden.

München

H. NEUBER

A. W. Pogorelow, Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen. (Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 3.) 78 S. Berlin 1956. Akademie-Verlag. Preis brosch. 18,50 DM.

In dem Buch wird das klassische Problem, wie weit eine geschlossene konvexe Fläche (das ist der Rand eines endlichen konvexen Körpers im euklidischen R_3) durch ihre Metrik bestimmt ist, abschließend gelöst. Der Autor beweist folgenden Satz:

Wenn zwei geschlossene Flächen eineindeutig und stetig aufeinander abgebildet werden können derart, daß einander entsprechende Kurvenbögen stets gleiche Längen haben, so sind die beiden Flächen kongruent,

d. h. sie können durch eine Bewegung (Spiegelung eingeschlossen) des R_3 ineinander übergeführt werden.

Der erste einwandfreie Beweis für die Starrheit der Eiflächen wurde 1899 von LIEBMANN und MINKOWSKI gegeben. Dann beschäftigten sich HILBERT, WEYL, COHN-VOSSEN mit dem Problem; COHN-VOSSEN bewies 1927, daß isometrische geschlossene dreimal stetig differenzierbare konvexe Flächen mit überall positiver GAUSSscher Krümmung kongruent sind. Erst 1943 gelang es HERGLOTZ die Voraussetzungen abzuschwächen und insbesondere die Positivität der GAUSSschen Krümmung fallen zu lassen. A. D. ALEXANDROW konnte 1947 die Voraussetzungen weiter abschwächen, jedoch ist all diesen Ergebnissen gemein, daß einschneidende Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden, die mit dem Wesen der Sache nichts zu tun haben. Der Verf. entwickelt nun, aufbauend auf Resultaten von ALEXANDROW, LIEBMANN und SALGALLER, eine Reihe speziell auf den vorliegenden Zweck zugeschnittener Schlussweisen, oft rein geometrischer Natur und gänzlich verschieden von den klassischen Methoden, mit deren Hilfe er den oben angegebenen Satz beweist und damit das Problem für den R_3 in voller Allgemeinheit löst.

Der Beweis ist sehr lang, und wenn er trotzdem gut lesbar bleibt, so ist das der vom Autor geschickt vorgenommenen Zergliederung und Anordnung zu danken. Er wird indirekt geführt, indem aus der Annahme der Existenz zweier inkongruenter isometrischer geschlossener konvexer Flächen ein Widerspruch hergeleitet wird.

In der Einführung weist der Verf. an einem Beispiel die Bedeutung seiner Resultate (in Verbindung mit dem „Verheftungssatz“ von A. D. ALEXANDROW) auch für Probleme der klassischen Differentialgeometrie überzeugend nach, indem er Aussagen über die Verbiegung glatter konvexer Flächen gewinnt, die mit klassischen Methoden bisher nicht erhalten wurden.

Den Herausgebern und besonders dem Übersetzer gebührt Dank dafür, daß sie diese wertvolle Monographie dem deutsch sprechenden Leser zugänglich gemacht haben. Sie wird sicher nicht nur von ausgesprochenen Spezialisten, sondern von allen Mathematikern, die Interesse für den Stand der Forschung auf dem Gebiete der Differentialgeometrie haben, mit großem Gewinn gelesen werden.

Halle/Saale

H. SACHS

F. Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band XCVI). XIII + 311 S. m. 160 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 49,80 DM.

In den letzten 30 Jahren haben verschiedene Geometer, im hervorragenden Maß der Verf. selbst, daran gearbeitet, die Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff und den einfachsten Sätzen darüber aufzubauen. Der Verf. verarbeitet alle diese Bemühungen zu einem sehr einleuchtenden durchsichtigen System. In einem einleitenden Kapitel stellt er die bekannten Sätze über Spiegelungen an Geraden und Punkten der euklidischen Ebene zusammen, betrachtet ihre Gruppe und beweist einige elementar-geometrischen Sätze (z. B. Höhensatz im Dreieck) mit diesen Methoden. Er kommt dann zu dem Begriff der metrischen Ebene, wenn er die üblichen Verknüpfungsaxiome, einige Axiome über Orthogonalität und den Satz von den drei Spiegelungen als Axiom voraussetzt. Es wird also über Anordnung, Stetigkeit und Parallelität nichts vorausgesetzt. Auch braucht die Bewegungsgruppe weder für die Geraden, noch für die Punkte transitiv zu sein. Nun kann er im zweiten Kapitel noch einen Schritt weitergehen und nur noch die Gruppen durch entsprechende Axiome zu Grunde legen. Die involutorischen Elemente können dann als Spiegelungen,

und zwar die Erzeugenden als Spiegelungen an Geraden, die Produkte von zwei Erzeugenden als Spiegelungen an Punkten nachträglich gedeutet werden. Kommt es vor, daß das Produkt von drei Erzeugenden gleich Eins ist, so ist die Geometrie elliptisch, und jede Spiegelung an einer Geraden kann auch als Spiegelung an einem Punkt, dem Pol der Geraden aufgefaßt werden. Die Unterscheidung von Punkt und Gerade ist also hier nicht mehr möglich. Das bedeutet nur, daß die betreffende Geometrie in sich vollständig dual ist. Aus der so gewonnenen Grundlegung werden dann die wichtigsten Folgerungen gezogen und das System der wichtigsten Sätze der betreffenden Geometrie aufgestellt. Dann stellt der Verf. den Anschluß an die projektive Geometrie her und zeigt, daß sich jede metrische Ebene in eine projektive einbetten läßt. Es muß dazu in der projektiven Ebene in der bekannten Weise eine feste Polarität zu Grunde gelegt werden. Der Beweis geschieht mit Hilfe der von HJELMSLEV entwickelten Halbdrehungen. Jede Bewegungsgruppe läßt sich dann durch Einführung idealer Elemente zu einer projektiv-metrischen Ebene erweitern. — Im dritten Kapitel gewinnt er dann den Anschluß an die Koordinatengeometrie und die Theorie der Vektorräume und kann die Isomorphie der von ihm eingeführten Bewegungsgruppen mit den algebraisch bekannten orthogonalen Gruppen zeigen. Er geht dann noch auf die Darstellung der Vektorräume und ihrer orthogonalen Gruppen durch hyperkomplexe Systeme, insbesondere von Quaternionen ein. — Zeigte sich schon in der bisherigen Entwicklung, daß bei vielen Begriffen und Beweisen die euklidische, elliptische und hyperbolische Geometrie unterschieden werden mußten, so baut der Verf. nun in den nächsten drei Kapiteln diese drei Arten von Geometrien noch einmal gesondert mit jeweils dafür spezifischen Hilfsmitteln auf. In der euklidischen Geometrie hat man noch einige weitergehende, für den Aufbau folgenreiche Sätze über Spiegelungen zur Verfügung; in der hyperbolischen Geometrie verwendet man mit Vorteil die „Enden“, die Punkte des absoluten Kegelschnittes. Für die elliptische Ebene wird ein Gruppenraum konstruiert; dessen Punkte den Gruppenelementen zugeordnet sind. Dieser Raum erweist sich als projektiver Raum.

Das Buch ist in hervorragender Weise geeignet, dem Leser den Sinn und die Denkweise axiomatischer Untersuchungen in der Geometrie nahe zu bringen. Die Axiome stehen nicht am Anfang, sondern werden behutsam in mehreren Arbeitsgängen aus der Geometrie herausgelöst. Wir gewinnen so einen vertieften Einblick in die Struktur der Geometrie.

Die metrische Ebene ist ein Kern, noch weiter innen als die absolute Geometrie Bolyais; durch eine Reihe von zusätzlichen Entscheidungen zwischen je zwei Möglichkeiten sind dann die einzelnen Geometrien daraus aufzubauen. Verf. gibt dazu ein sehr instruktives Schema am Schluß des Buches.

Der Verf. versteht es, den Leser an jeder Stelle ganz in die Tiefe der Gedanken einzuführen; diese Gedanken ordnen sich zu einem Kosmos, und der Leser hat in jedem Augenblick diesen Kosmos vor Augen und den Ort, zu dem die einzelne Betrachtung gehört. Das Buch vermittelt so nicht nur Kenntnisse, sondern auch und vor allem Bildung.

Das Buch ist entstanden aus Vorlesungen für Studenten der Mathematik der höheren Semester. Es wird inhaltlich wenig vorausgesetzt, sondern alles Erforderliche an seiner Stelle ausführlich gebracht. Wohl aber sollte der Leser eine gewisse Reife in der Verarbeitung mathematischer Denkweise und Fragestellungen mitbringen. Es wendet sich also durchaus nicht nur an Spezialisten für Grundlagen der Geometrie, sondern an jeden Mathematiker, der Freude an dem Aufbau, der Ordnung und dem Zusammenklang der verschiedenen Betrachtungsweisen eines Wissensgebietes hat.

Halle/Saale

O.-H. KELLER

Fachbegriffe der Programmierungstechnik. Wörterverzeichnis für die Programmierung von Digital-Rechenanlagen mit Stichworten in fünf Sprachen, ausgearbeitet vom Fachausschuß Programmieren der GAMM, herausgegeben v. J. HEINHOLD, München. München 1959. R. Oldenbourg Verlag. Preis brosch. 4,40 DM.

Der von der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) eingesetzte Fachausschuß Programmieren hat es unter seinem Leiter Prof. Dr. Heinhold dankenswerterweise unternommen, die durch Vereinbarung festgelegten programmierungstechnischen Termini in einer Liste zusammenzustellen. Diese Fachwörterliste, die eine Erweiterung der 1957 herausgegebenen ist, umfaßt 1. numerisch-mathematische Begriffe, 2. eigentliche Programmierungsbegriffe, 3. einige die Bauelemente, Speicher, Ein- und Ausgabe und Bedienung betreffende technische Wortbezeichnungen. Nach Möglichkeit sind den deutschen Wörtern die englischen, französischen, schwedischen, holländischen und russischen beigelegt. Die alphabetischen Register sind deutsch und englisch. Im Interesse einer einheitlichen Terminologie ist die Herausgabe dieses Bändchens außerordentlich zu begrüßen.

Dresden

H. HEINRICH

E. A. Maxwell, General Homogeneous Coordinates in Space of Three Dimensions. XIV + 169 S. Cambridge 1959. University Press. Preis brosch. 13/6 net.

Zweiter Band eines Werkes, von dem der erste Band die ebene analytische Geometrie behandelt. Dieser Band ist eine Einführung in die analytische Geometrie des Raumes für Studenten des 2. Studienjahres an englischen Universitäten. Dem Verf. lag daran, eine möglichst kurze Einführung zu geben, in den Geist ihrer Methoden einzudringen und den Weg zu einem tieferen Studium vorzubereiten. Kap. I. Die linearen Gebilde, Kap. II. Quadratische Flächen (mit Polarität und Reziprozität). Kap. III. Die geradlinigen Erzeugenden der Quadriken. Kap. IV. Liniengeometrie (die Grundeigenschaften, das Wichtigste über Komplexe und Kongruenzen). Kap. V. Die gewundene Kurve 3. Ordnung. Kap. VI. Büschel von Quadriken (nicht ausgearteter Fall, die ausgearteten werden erwähnt). Kap. VII. Anwendungen auf die euklidische Geometrie (affine Eigenschaften der Quadriken, Kugelbüschel, konfokale Scharen von Quadriken). Kap. VIII. Der Gebrauch der Matrizenrechnung mit geometrischen Anwendungen.

Die ersten sechs Kapitel bringen durchweg projektiv-invariante Eigenschaften. Der Gruppenbegriff, der Invarianzbegriff, Transformationen und ihre Gruppen liegen außerhalb des Rahmens. Auf jede historische Notiz wird verzichtet. Auch die Namen von DESCARTES, PASCAL, MONGE, PLÜCKER, CAYLEY, SALMON werden nicht erwähnt, auch wenn von ihren Ergebnissen gesprochen wird, nur einige zeitgenössische englische Autoren werden zitiert. Durch diese Beschränkungen ist es dem Verf. möglich geworden, eine gut verständliche Übersicht über die wichtigsten geometrischen Tatsachen zu geben.

Sehr große Sorgfalt legte der Verf. auf die Auswahl der Aufgaben; er gibt deren drei Gruppen: 1. Sätze, deren Beweis dem Leser überlassen, deren Kenntnis dann im folgenden vorausgesetzt wird. 2. Eine Fülle geschickt gewählter Zahlenbeispiele. 3. Schwierigere und interessantere Aufgaben.

Halle/Saale

O.-H. KELLER

E. D. Cashwell and C. J. Everett, A practical manual on the Monte Carlo Method for random walk problems. IX + 153 S. m. 64 Abb. London 1959. Pergamon Press. Preis geb. 40s net.

In den sogenannten Monte-Carlo-Methoden werden künstliche stochastische Modelle verwendet, die je-

weils die wirkliche Durchführung und Durchrechnung einer großen Anzahl von zufälligen Vorgängen, insbesondere von Irrfahrten, erfordern. Sie dienen einmal zur Behandlung von Fragen der praktischen Analysis, z. B. von Quadraturen, von Systemen linearer Gleichungen, Randwertproblemen. Vielleicht von noch höherer Bedeutung sind Monte-Carlo-Methoden zur numerischen Durchrechnung von physikalischen und technischen Problemen, die durch Gleichungen oder Differentialgleichungen von so komplizierter Bauart oder in so hoher Anzahl mit vielen Unbekannten, unbekannten Funktionen und Parametern beschrieben sind, daß eine Behandlung mit den üblichen mathematischen Hilfsmitteln hoffnungslos ist. Hierzu gehören beispielsweise Stoß-, Transport- und Absorptionsprobleme, die beim Durchgang von Neutronen oder Photonen durch Materie auftreten, aber auch die Nachbildung einer Hauptverkehrsstraße in einem Fernsprechat mit ihren durch den Zufall bedingten Gesprächszeiten, Wartezeiten und Fehlverbindungen.

Das vorliegende kleine Handbuch ist ausschließlich den physikalischen Monte-Carlo-Methoden gewidmet. Nach Erörterung der grundlegenden Prinzipien und der Herstellung von Zufallszahlen für die eingehenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden ausführlich behandelt die modellmäßige Nachbildung von Quellen für die Teilchen, ihrer Energieverhältnisse und ihrer freien Weglängen sowie von Zusammenstößen, Durchgängen und Absorptionen. Die für die elektronischen Rechenggeräte nötigen Programme und Unterprogramme werden für zahlreiche spezielle Fragestellungen entwickelt und durch instruktive Schemata dargestellt. Beispiele und praktische Hinweise erläutern die Verfahren, für die noch eine große Anzahl von Einzelfragen, etwa der Koordinaten- und Parameterwahl von Bedeutung sind.

Da die Literatur über Monte-Carlo-Methoden vielfach sehr zerstreut und schwer zugänglich ist, werden Physiker und Mathematiker diese übersichtliche Zusammenstellung dankbar begrüßen.

Stuttgart

G. SCHULZ

W. D. Kupradse, Randwertaufgabender Schwingungstheorie und Integralgleichungen (Hochschulbücher für Mathematik, Band 21). VIII + 239 S. m. 11 Abb. Berlin 1956. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. DM 27,60.

Das vorliegende Buch ist der ausführlichen Untersuchung von Schwingungsgleichungen vom Typ

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

bzw.

$$\Delta u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \text{grad div } u + k^2 u = 0 \quad (*)$$

und den zugehörigen in der mathematischen Physik interessierenden Randwertaufgaben (RWA) gewidmet. Die meisten Beiträge zu dieser Theorie stammen vom Verfasser selbst; durch Ergänzung mit neueren Ergebnissen anderer Autoren ist eine einheitliche Darstellung der bisher erzielten Resultate geschaffen worden.

Methodisch ist das Vorgehen naturgemäß analog zu dem in der klassischen Potentialtheorie. Als hauptsächlichste Hilfsmittel dienen dabei die Integralgleichungen, sowohl für die Existenzbeweise als auch bei der Aufstellung von Lösungen der RWA.

Von zentraler Bedeutung ist die auf SOMMERFELD zurückgehende „Ausstrahlungsbedingung“, mit deren Hilfe die wichtigsten Unitätssätze aufgestellt werden können. — Die fünf Kapitel des Buches haben folgenden Inhalt: Allgemeine Eigenschaften der Schwingungsgleichung und ihrer Integrale, Lösung der fundamentalen Randwertprobleme für das Außengebiet, Randwertaufgaben aus der Theorie der elektro-

magnetischen Schwingungen, Stationäre Schwingungen elastischer Körper, Singuläre Integralgleichungen.

Der Inhalt von Kapitel IV — dem eigentlichen Hauptteil des Buches — ist besonders interessant, da über die Lösung der Schwingungsrandwertprobleme der Elastizitätstheorie bisher nur wenig bekannt war. Es werden RWA nicht nur für das Innengebiet, sondern vor allem auch für das Außengebiet betrachtet.

In Verallgemeinerung der klassischen Potentialtheorie werden durch Konstruktion von Matrizen wichtige Grundlösungen zur Gleichung (*) aufgestellt. Man gelangt so zu den Potentialen der einfachen Schicht, der Doppel- und Antennenschicht. Diese Resultate liefern damit auch eine Theorie der RWA für die Gleichungen

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u + k^2 u = 0$$

und

$$\Delta u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \text{grad div } u = 0$$

in allen Einzelheiten. Auch erlaubt diese Methode in einigen speziellen Fällen die Zurückführung auf ein lineares algebraisches Gleichungssystem, was für die praktische Auswertung von Bedeutung ist. Allerdings wird dies nicht weiter ausgeführt. Das Buch stellt sich die theoretische Behandlung der Probleme zur Aufgabe und verzichtet völlig auf praktische Durchführungen sowie die Angabe konkreter Beispiele. Es folgen dann weiter Untersuchungen von Schwingungen oder des Gleichgewichts inhomogener Medien durch ein „Massenpotential“. Damit werden z. B. Ausbreitungen elektromagnetischer Wellen, Aufgaben aus der Elektroakustik, Beugung des Schalles und der linearpolarisierten elektrischen Querwelle und Probleme des statischen Gleichgewichtes inhomogener elastischer Medien behandelt.

Durch die im Buche betrachteten Fälle ergeben sich einige allgemeine Resultate zur Behandlung von Integralgleichungen bei RWA. Kapitel V ist speziell den singulären Integralgleichungen gewidmet. Das Ziel ist dabei die Angabe von Methoden zur expliziten Lösung für einige Systeme von singulären Integralgleichungen, die in den Anwendungen auftreten. Dies Kapitel enthält z. B. die NOETHERSchen Sätze sowie eine Methode von CARLEMAN, strebt aber ansonsten keine große theoretische Allgemeinheit an und verzichtet auch auf letzte Strenge im Beweis. Die hier angeführten Resultate finden sich nicht in dem bekannten Buche von MUSCHELISCHWILI.

Der Text ist leicht faßlich und angenehm lesbar geschrieben. Da es sich inhaltlich um die Behandlung der nach der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ wichtigsten Gleichung der mathematischen Physik handelt, stellt diese Übersetzung der 1955 in Tbilisi erschienenen Originalausgabe eine große Bereicherung für die Interessenten dar — weniger vielleicht für Ingenieure, als vielmehr für Mathematiker und Physiker.

Dresden

P. H. MÜLLER

W. A. Bizadse, Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus (Mathematische Forschungsberichte, Band V). 59 S. m. 5 Abb. Berlin 1957. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis brosch. 13,20 DM.

Die Frage, welche Arten von Randbedingungen bei einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Wechsel des Typus vom elliptischen zum hyperbolischen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewährleisten, ist nicht nur rein mathematisch reizvoll, sondern für gasdynamische Anwendungen auf gemischte Unterschall-Überschallströmungen von geradezu brennendem Interesse. Das Standardbeispiel der TRICOMischen (linearen) Gleichung $y u_{xx} + u_{yy} = 0$ ist daher in letzter Zeit häufig diskutiert worden.

In der vorliegenden Abhandlung untersucht Verf. im Anschluß an M. A. LAWRENTJEW für den einfachsten „gemischten“ Fall: $u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} = 0$ (mit $y = 0$ als Übergangslinie des Typus) mehrere neuartige Randwertaufgaben. Besonders bemerkenswert erscheint dem Ref. die „Aufgabe T_2 “, bei der ein zweifach-zusammenhängendes Ringgebiet betrachtet wird; ferner die vom Verf. gegebene Formulierung des diesen Aufgaben äquivalenten Extremalprinzips. Für die Gasdynamik könnten die jedenfalls beachtenswerten Resultate in der linearisierten Theorie von Nutzen sein; die eigentliche Problematik ist jedoch ohne den entscheidenden Vorstoß zu nichtlinearen gemischten Gleichungen nicht zu meistern.

Göttingen

M. SCHÄFER

F. R. Gantmacher, Matrizenrechnung.

Teil I. Allgemeine Theorie (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 36). XI + 324 S. m. 5 Abb. Berlin 1958. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. DM 26,80.

Teil II. Spezielle Fragen und Anwendungen (Hochschulbücher f. Mathematik, Bd. 37). VII + 244 S. m. 4 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. DM 26,—.

Dieses Werk über Matrizenrechnung ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verf. an der Moskauer Lomonossow-Universität und an anderen russischen Hochschulen gehalten hat. Die russische Ausgabe, deren deutsche Übersetzung hier vorliegt, erschien im Jahre 1954. Das Buch richtet sich nicht nur an Mathematiker, sondern auch an Physiker und Ingenieure. Das ist sicher berechtigt, weil die Matrizenrechnung heute sowohl in der theoretischen Physik, als auch in vielen technischen Anwendungen gebraucht wird; aber es ist zugleich auch eine Belastung für die Darstellung, weil es schwer ist, den verschiedenartigen Anforderungen auf Allgemeinheit und Deutlichkeit der Definitionen und Beweise gleichzeitig gerecht zu werden.

Es war ein glücklicher Gedanke der Redaktion, die deutsche Übersetzung in zwei Bänden erscheinen zu lassen, deren erster den theoretischen Teil enthält, während der zweite Band Anwendungen der Matrizenrechnung, vor allem Anwendungen auf Differentialgleichungssysteme und auf stochastische Matrizen behandelt. Die Kenntnis der Determinantentheorie wird vorausgesetzt, was bei der breiten Anlage des Werkes nicht unbedingt notwendig gewesen wäre und die Gelegenheit entzieht, den Begriff des äußeren Produktes einzuführen und zu benutzen.

Der erste Teil bringt die theoretischen Grundlagen, die Auflösung linearer Gleichungssysteme und die Operationen im n -dimensionalen Vektorraum; es folgen charakteristische Gleichung und Minimalpolynom, worauf in bemerkenswerter Weise die Definition allgemeiner Matrizenfunktionen begründet wird, ferner Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen mit einer sehr ausführlichen Elementarteilertheorie, die Auflösung von gewissen Matrixgleichungen und endlich die Theorie der quadratischen und hermiteschen Formen, sowie deren Transformation auf Hauptachsen. Viel Wert wird immer darauf gelegt, Methoden für die praktische Durchführung der verschiedenen Matrizenoperationen vorzuzeigen. Die Übersetzer haben sich mit gutem Erfolg bemüht, die Fachausdrücke den üblichen deutschen Bedeutungen entsprechend zu übersetzen; nur beim Ausdruck „adjungierte Matrix“ scheint dies nicht gelungen zu sein, denn in ihrer üblichen Bedeutung kommt diese nicht vor, dagegen wird sie zweimal in zwei verschiedenen Bedeutungen definiert (S. 76 und S. 246).

Das Schwergewicht des Werkes liegt ohne Zweifel auf den Anwendungen, also vor allem auf dem zweiten Band. Hier werden in 5 Kapiteln, die voneinander unabhängig gelesen werden können, einzelne Probleme

dieser Art behandelt. Zunächst werden in einem kürzeren Kapitel Normalformen für symmetrische, schiefssymmetrische und orthogonale Matrizen mit komplexen Elementen aufgestellt. Dann folgt die Ausdehnung der gewöhnlichen Äquivalenztheorie auf singuläre Matrizenbüschel nach KRONECKER. Das Hauptinteresse konzentriert sich aber auf die drei letzten Kapitel, welche stochastische Matrizen, Differentialgleichungssysteme und Stabilitätsfragen behandeln.

Hier handelt es sich um die Auflösung von Systemen linearer Differentialgleichungen, deren Koeffizienten auch von der unabhängigen Variablen t abhängen dürfen. Bei der Darstellung dieser Lösungen erweist sich bekanntlich die Matrizenrechnung als außerordentlich nützlich. Diese Entwicklungen werden auch noch an schwach singulären Stellen durchgeführt. Die Untersuchung der Stabilität der Lösungen nach den Sätzen und Methoden von LJAPUNOW erfordert eine eingehende Diskussion der Lage der Nullstellen der charakteristischen Gleichungen; zu diesem Zwecke werden im letzten Kapitel mit begrüßenswerter Ausführlichkeit die Sätze von HURWITZ, ROUTH u. a. abgeleitet. Ähnliche Untersuchungen erfordert das Problem der Grenzwahrscheinlichkeiten bei MARKOFFschen Ketten.

Die Übersetzer haben im Einverständnis mit dem Verf. einige Änderungen im Text vorgenommen, in dankenswerter Weise das Literaturverzeichnis ergänzt und ein Sachregister beigelegt. Die technische Ausstattung des Werkes kann als vorbildlich bezeichnet werden.

Innsbruck

W. GRÖBNER

A. D. Myschkis, Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument (Hochschulbücher für Mathematik, Band 17). X + 181 S. m. 9 Abb. Berlin 1955. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 21,30 DM.

Das vorliegende Buch ist die deutsche Übersetzung einer im Jahre 1950 in russischer Sprache erschienenen Abhandlung des Verfassers, die einen wesentlich überarbeiteten Teil seiner Dissertation darstellt. In der Einleitung geht er kurz auf den Entwicklungsstand sowie auf die Bedeutung und Anwendung der Theorie der Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument ein. Da er diese Theorie für gewisse Typen linearer Gleichungen mit Hilfe von Begriffen und Methoden aus der Theorie des STELTJESSchen Integrals entwickelt, behandelt er in einem Anhang I die benötigten grundlegenden Eigenschaften des STELTJESSchen Integrals und betrachtet im Anhang II einige diesbezüglichen Ungleichungen. Im 1. Kapitel widmet er sich linearen Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument vom Typ

$$y'(x) = \sum a_k(x) y(x - \alpha_k(x)) + f(x)$$

oder allgemeiner

$$y'_i(x) = \sum a_{ikj}(x) y_j(x - \alpha_{ikj}(x)) + f_i(x); \quad i = 1, \dots, n,$$

die er auf die Integrodifferentialgleichungen

$$y'(x) = \int_0^\infty y(x-s) dr(x,s) + f(x)$$

bzw.

$$y'_i(x) = \sum_j \int_0^\infty y_j(x-s) dr_j^i(x,s) + f_i(x); \quad i = 1, \dots, n$$

zurückgeführt. Er formuliert die Aufgabenstellung und untersucht allgemeine Eigenschaften solcher Gleichungen, wie z. B. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen und von den rechten Seiten der Gleichungen. Ferner studiert er andere Formen linearer Gleichungen und fügt noch Betrachtungen über die Kerne $r(x,s)$ an. Kapitel 2 befaßt sich mit den qualitativen Eigenschaften der

Lösungen linearer Gleichungen 1. Ordnung und Kapitel 3 mit dem Sonderfall der homogenen Gleichungen vom instabilen Typus. Umfangreicher ist Kapitel 4, das den stabilen Typ behandelt; hier wird das asymptotische Verhalten der Lösungen (z. B. in bezug auf Dämpfung und Schwingungseigenschaften) eingehend untersucht. Das letzte Kapitel (5) ist den linearen homogenen Gleichungen 2. Ordnung vom periodischen Typus $y''(x) = -\int_0^\infty y(x-s) dr(x, s)$ gewidmet. Ein

Anhang III bringt noch die Elemente aus der Theorie der rekursiven Folgen, die z. B. zur Abschätzung von Lösungen benutzt wird, und ein weiterer Anhang (IV) ist verallgemeinerten Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und konstanten Nacheilungen vorbehalten; diese Gleichungen werden nicht nach der vom Verfasser entwickelten Methodik behandelt, sondern gestatten die Anwendung der LAPLACE-Transformation. Obwohl der im vorliegenden Buch dargelegte Gegenstand im Zusammenhang mit technischen Problemen, z. B. mit Aufgaben der Regelungstechnik, größtes Interesse verdient, geht der Verfasser hierauf nicht weiter ein und wendet sich somit allein an den rein mathematisch interessierten Leser; von diesem verlangt er die Kenntnis der Elemente der Analysis, der Grundlagen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und einiger Tatsachen aus der Funktionentheorie.

Berlin

R. REISSIG

M. Fisz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 40). X + 528 S. m. 37 Abb. Berlin 1958. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. DM 36,—.

Es handelt sich um eine tadellose deutsche Übersetzung der im Februar 1957 erschienenen stark erweiterten zweiten Auflage des einführenden polnischen Lehrbuches. Die Anforderungen an den Leser sind bewußt niedrig gehalten: An Vorkenntnissen genügt der Stoff der Anfängervorlesungen in Analysis. Begriffliche Schwierigkeiten, wie sie vor allem häufig bei der Einführung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie auftreten, werden durch die ausführliche Diskussion von Problemstellungen in einer Fülle geschickt gewählter Beispiele gemildert. Auf eine schärfstmögliche Formulierung der Sätze wird meist verzichtet zu Gunsten der Einfachheit der Beweise, die im übrigen durchweg sehr ausführlich gefaßt sind. Die maßtheoretischen Grundlagen sind so knapp gehalten (u. a. Beschränkung auf das RIEMANN-STIELTJES-Integral), daß nur Zufallsgrößen lückenlos behandelt werden können, die eine diskrete Verteilung oder eine Dichte besitzen. Bei verschiedenen anderen Sätzen, insbesondere auch bei einigen Grenzwertsätzen und in der Testtheorie, verweist der Verf. wegen des Beweises auf die Literatur. Der Aussagegehalt der Sätze selbst wird häufig wieder an praktischen Beispielen demonstriert und gegen Fehlinterpretationen abgegrenzt.

Im einzelnen enthält der Teil I (Wahrscheinlichkeitsrechnung) des Werks zunächst die Einführung der zufälligen Ereignisse und Variablen, wobei das Axiomensystem von KOLMOGOROFF zugrunde gelegt wird. Dann werden die Momente, die Regressions-theorie, die charakteristischen Funktionen und einige spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen behandelt. Die wichtigsten Grenzwertsätze und zwei Kapitel über MARKOFFsche Ketten und stochastische Prozesse beenden den ersten Teil. Die ersten Kapitel des zweiten Teils (Mathematische Statistik) sind den Verteilungen von Stichprobenparametern einschließlich ihrer Grenzverteilungen (Sätze von KOLMOGOROFF, SMIRNOW und RÉNYI) gewidmet. Darauf wird die Testtheorie aufgebaut, die von den einfachsten Signifikanztests und

der Varianzanalyse über die Hypothesentesttheorie von NEYMAN-PEARSON bis zur Sequentialanalyse von A. WALD führt. Im Anhang sind die Tafeln der wichtigsten Verteilungen aufgenommen.

München

D. BIERLEIN

P. K. Raschewski, Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 42). 606 S. m. 32 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. DM 42,—.

Es ist die Übersetzung eines Buches des Verfassers, das 1953 in russischer Sprache erschien. Wie der Verf. selbst betont, soll das Lehrbuch als eine Monographie für Spezialisten angesehen werden. Nichtsdestoweniger ist das Buch sehr klar geschrieben und folglich auch den Studenten zugänglich. Der Verfasser hat in meisterhafter Weise die Vereinbarung der extremalen Strenge, was die Definitionen, Formulierung der Sätze und Durchführung der Beweise betrifft, mit einer Fülle des intuitionistischen Stoffes erzielt. Von diesem Standpunkt aus besitzt das Lehrbuch von RASCHEWSKI keine analoge Position in der Weltliteratur dieses Gebietes.

Auch die moderne Theorie der geometrischen Objekte wurde vom Verf. in genügendem Grade berücksichtigt. Von besonders hohem Wert ist die Tatsache, daß der Verfasser tief und gründlich in die Anwendungen der Tensorrechnung eingedrungen ist, indem er eingehend die mathematischen Grundlagen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie sowie der Spinortheorie behandelt hat.

Um das Studium des umfangreichen Werkes zu erleichtern, wurden einige Paragraphen mit Sternchen versehen, welche bei der ersten Lektüre außerachtgelassen werden können.

Die einzige Schattenseite des Werkes (die teilweise durch die Herausgeber der deutschen Übersetzung beseitigt wurde) ist, daß der Verfasser fast keine Originalarbeiten zitiert.

Kraków (Polen)

S. GOŁAB

P. K. Raschewski, Elementare Einführung in die Tensorrechnung. 79 S. m. 6 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis brosch. DM 6,—.

Von dem Buch „RIEMANNsche Geometrie und Tensoranalysis“ wurde der erste Abschnitt „Tensoren im dreidimensionalen euklidischen Raum“ ausgesondert und unter dem Titel „Elementare Einführung in die Tensorrechnung“ herausgegeben. Wie der Titel selbst zeigt, wird hier der Tensorbegriff auf den Fall der dreidimensionalen euklidischen Geometrie und auf die rechtwinkligen kartesischen Koordinatensysteme beschränkt. In diesem Fall reduziert sich die Differentiation der Vektor- und Tensorfelder auf die gewöhnliche Differentiation. Es werden die wichtigsten Anwendungen des elementaren Tensorbegriffes angegeben wie der Spannungs- und Verzerrungstensor und die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, weiter der Fluß eines Vektors bzw. Tensorfeldes durch eine Fläche sowie die Grundgleichungen der Hydrodynamik.

Kraków (Polen)

S. GOŁAB

J. Mikusiński, Operatorenrechnung (Mathematik für Naturwissenschaft und Technik, Bd. 1). XII + 360 S. m. 177 Abb. Berlin 1957. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. DM 37,20.

Mit der deutschen Übersetzung der zweiten Auflage der „Operatorenrechnung“ von JAN MIKUSIŃSKI aus dem Polnischen wurden die vor etwa zehn Jahren begonnenen verdienstvollen Arbeiten des Autors auf

diesem Gebiet einem breiten Leserkreis erschlossen. Es handelt sich dabei um eine direkte algebraische Begründung der Operatorenrechnung: Ausgehend von dem Faltungsprodukt zweier Funktionen werden die Operatoren mit Hilfe der zur Faltung inversen Operation als Brüche eingeführt. Die Grundlagen sind somit sehr einfach, im Gegensatz zum HEAVISIDE-Kalkül völlig exakt und erfordern kein Hilfsmittel wie die LAPLACE-Transformation.

Rein formal kann man von einer mit Hilfe der LAPLACE-Transformation aufgestellten Formel $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ unmittelbar zur Schreibweise von MIKUSIŃSKI übergehen, man braucht lediglich den Buchstaben \mathcal{L} wegzulassen und s nicht als komplexe Veränderliche im Bildbereich, sondern als Operator aufzufassen. Die neue Operatorenrechnung liefert aber mehr als lediglich eine andersartige Begründung und Deutung. Da keine Einschränkungen für große t erforderlich sind, werden viel mehr Funktionen erfaßt als bei der LAPLACE-Transformation, so daß jetzt auch gewisse Eindeutigkeitsfragen entschieden werden können. Außerdem erhält man eine einfache mathematische Grundlage für die DIRACSche Delta-Funktion und verwandte „ δ -Funktionen“, ohne die Theorie der Distributionen heranziehen zu müssen.

Zur Lösung partieller Differentialgleichungen entwickelt der Verfasser eine neue Analysis für Operatorfunktionen, was, vom Standpunkt der Reinheit der Methode aus gesehen, zweifellos recht interessant ist. Da aber die Theorie der LAPLACE-Transformation über gut ausgebauten funktionentheoretischen Methoden verfügt, die hier nicht herangezogen werden, wird man in Zukunft sicher von beiden Auffassungen der Operatorenrechnung die Vorteile übernehmen und sie zu einer einheitlichen Methode vereinen.

Neben den theoretischen Entwicklungen sind mehrere Kapitel den Anwendungen gewidmet (Theorie der elektrischen Netze, Theorie des Balkens, Schwingungen einer Saite, Wärmeleitungs- und Telegraphengleichung), so daß das Buch nicht nur den Mathematikern, sondern auch den Physikern und Ingenieuren viel zu bieten hat. Studierende finden in ihm zahlreiche Übungsaufgaben (mit Lösungen). Somit wird das Buch eine weite Verbreitung finden.

Halle (Saale)

L. BERG

H. Sprenger, Experimentelle Untersuchungen an geraden und gekrümmten Diffusoren (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, herausg. v. Prof. Dr. J. Ackeret, Nr. 27). 84 S. m. 37 Abb. Zürich 1959. Verl. Leemann. Preis brosch. 17,— SFr.

Diffusoren, d. h. Strömungskanäle mit stromabwärts zunehmenden Querschnitten, spielen in der Praxis des Strömungsmaschinenbaus zur Umsetzung von kinetischer in potentielle Energie eine bedeutende Rolle. Für die meisten Fälle der reibungsbehafteten verzögerten Strömung — insbesondere in gekrümmten Kanälen — fehlen noch theoretische Behandlungsmethoden. In der vorliegenden Arbeit werden daher an Hand einer systematischen Vermessung gerader und schwach gekrümmter Diffusoren mit kreisförmigen Eintrittsquerschnitt und ebensolchen sowie elliptischen Austrittsquerschnitten wesentliche physikalische Gesetzmäßigkeiten mitgeteilt.

Dem Autor liegt eine sorgfältige Klarstellung der Versuchsbedingungen und eine vom Standpunkt der Theorie einwandfreie Auswertung der Versuchsergebnisse am Herzen. Besonderer Wert wird auf die Kennzeichnung der Geschwindigkeitsverteilungen und der Grenzschichtparameter durch den Massenstrom,

Impulsstrom und Energiestrom zugeordnete Strömungskoeffizienten und auf die zweckmäßige Definition des Diffusorwirkungsgrades gelegt.

Die Versuchsergebnisse sind in einer sowohl für den technischen Gebrauch als auch für die theoretische Verarbeitung geeigneten Weise dargestellt und geben einen wertvollen Einblick in den Mechanismus der verzögerten Strömung. Sie erhellen vor allen Dingen den engen Zusammenhang zwischen Druckumsetzung und Eintrittsgrenzschichtdicke; hohe Wirkungsgrade sind nur bei kleiner Grenzschichtdicke am Diffusoreintritt zu erzielen. Krümmung des Diffusors verschlechtert im allgemeinen den Wirkungsgrad. Nicht gekrümmte und stark abgeplattete Diffusoren sind aber zu vermeiden. Hier wirkt die mit der Krümmung verbundene Sekundärströmung ablöschungsmindernd. — Auf Grund dieser und weiterer Erkenntnisse werden vom Verfasser abschließend einige Vorschläge zur Steigerung der Druckumsetzung in Diffusoren behandelt, die für den gestaltenden Ingenieur von Interesse sind.

Dresden

G. CORDES

Loo-Keng Hua, Additive Primzahltheorie. VI + 174 S. Leipzig 1959. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 20,50 DM.

Die vorliegende deutsche Fassung, die aus der russischen Ausgabe des Werkes hervorgegangen ist, wurde durch Zusammenarbeit mit dem Verfasser auf den neuesten Stand gebracht. Es handelt sich um eine Darstellung der analytischen Untersuchungen über auf Primzahlen bezügliche Probleme. Im Mittelpunkt stehen die Ergebnisse von VINOGRADOW, die durch des Verfassers eigene Forschungen ergänzt werden.

Die Darstellung ist knapp gehalten, und der Stoff ist außerordentlich straff gegliedert. Die Zielsetzung eines jeden Kapitels ist klar umrissen. Im allgemeinen handelt es sich jeweils um den Beweis eines bestimmten Hauptsatzes, der durch die Ableitung der erforderlichen Hilfssätze vorbereitet wird. Dadurch werden Lektüre und Verständnis sehr erleichtert. Trotzdem bleibt in dieser Hinsicht ein Wunsch offen: Eine einführende generelle Orientierung über die behandelte Problematik im ganzen würde die Darstellung verlebendigen und manche inneren Zusammenhänge schärfer hervortreten lassen.

Dem verallgemeinerten GOLDBACH-WARINGSchen Problem ist (in zwei Kapiteln) eine eingehende Untersuchung gewidmet. In zwei weiteren Kapiteln werden Systeme diophantischer Gleichungen mit Primzahlen als Unbekannten behandelt. Das Werk schließt mit der Nennung mehrerer weitergehender Vermutungen, durch deren Lösung die heutige additive Primzahltheorie eine Umgestaltung erfahren würde.

Potsdam

M. DRAEGER

G. Matz und P. Gayer, Berechnung von gußeisernen emaillierten Druckbehältern, Messungen an einem 6 cbm-Rührwerksbehälter. XVI + 223 S. m. 97 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis 37,50 DM.

Das vorliegende Buch enthält experimentelle und theoretische Untersuchungen des Spannungszustandes eines gußeisernen, emaillierten Behälters, wie er in chemischen Werken zur Anwendung kommt, und entstand auf Grund des Bedürfnisses, das Verhalten der Emailschiicht bei innerem Überdruck kennenzulernen. Es ist ausschließlich für Ingenieure gedacht, die speziell mit Entwurf und Konstruktion derartiger Kessel zu tun haben. Für den Leserkreis der vorliegenden Zeitschrift ist das Buch kaum von Interesse.

Freiburg/Sa.

D. RÜDIGER

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

L. Heffter, Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen. Zweite wesentlich verbesserte Auflage. VIII + 64 S. m. 13 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis brosch. 19,80 DM.

L. Collatz, The Numerical Treatment of Differential Equations. XV + 568 S. m. 118 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 93,60 DM.

A. Pflüger, Elementare Schalenstatik. 3. Auflage. VIII + 112 S. m. 56 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. 19,50 DM.

I. I. Priwalow, Einführung in die Funktionentheorie, Teil III. V + 188 S. m. 57 Abb. Leipzig 1959. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 12,90 DM.

W. Lietzmann, Aus meinen Lebenserinnerungen. 114 S. Göttingen 1959. Vandenhoeck & Ruprecht. Preis brosch. 6,80 DM.

E. Muschelknautz, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Druckverluste pneumatischer Förderleitungen unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses

von Gutreibung und Gutgewicht. (VDI-Forschungsheft 476.) 32 S. m. 31 Abb. u. 4 Tafeln. Düsseldorf 1959. VDI-Verlag. Preis brosch. 27,75 DM.

R. Coester, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Querstromgebläsen. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eigen. Techn. Hochschule Zürich, Nr. 28.) 57 S. m. 76 Abb. Zürich 1959. Verlag Leemann. Preis brosch. SFr. 14.—

W. Matz, Wärme- und Stoffaustausch in Arbeitsdiagrammen auf projektiver Grundlage. VIII + 142 S. m. 44 Aufg. u. 56 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. 24,— DM.

I. N. Sneddon and R. Hill, Progress in Solid Mechanics, Vol. I. XII + 448 S. m. 63 Abb. Amsterdam 1960. North-Holland Publishing Company. Preis geb. hfl. 50.—

Orbit Theory. (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. IX.) 195 S. m. 58 Abb. Providence 1959. American Mathematical Society. Preis geb. \$ 7.20.

J. E. Ruzicka, Structural Damping. IV + 165 S. m. 75 Abb. Oxford 1960. Pergamon Press Ltd. Preis brosch. 30 s. net.

NACHRICHTEN

Seinen 75. Geburtstag feiert am 14. August 1960 Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. e. h. CONSTANTIN WEBER, Hannover, Hindenburgstraße 39. Er ist in dieser Zeitschrift nicht nur immer wieder als Verfasser bedeutender wissenschaftlicher Arbeiten hervorgetreten, sondern er gehört seit vielen Jahren und auch heute noch zu den tätigsten Mitarbeitern des Herausgebers. Es wird daher für den Leserkreis, zu dem auch viele Schüler des Jubilars gehören, eine Freude sein, zu erfahren, daß sich der 75-Jährige einer guten Gesundheit erfreut und noch überaus rege wissenschaftlich tätig ist. Der Herausgeber und seine Mitarbeiter beglückwünschen ihn zu seinem Ehrentage und hoffen, daß er sich noch vieler Jahre guter Gesundheit und froher Schaffenskraft erfreuen möge.

HEINRICH

Der Vorsitzende der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM), Prof. Dr. R. SAUER (TH München), hielt vom 15. 3.—14. 4. 1960 Gastvorlesungen in Washington, Philadelphia, New York, Pasadena, Berkeley, Stanford, Minneapolis, Chicago und Ann Arbor.

H.

The Xth International Congress of the History of Science will be held in the United States of America, 26 August—2 September, 1962. Opening sessions of the Congress will be held at Cornell University, Ithaca, New York, and the concluding sessions will be held at the American Philosophical Society, Philadelphia, Pennsylvania. The President of the Congress is Professor HENRY GUERLAC of Cornell University. The Secretary of the Congress is Professor C. DORIS HELLMAN.

All inquiries should be addressed to The Secretary, Xth International Congress of the History

of Science, Cornell University, Ithaca, New York (U.S.A.). Those wishing to receive bulletins concerning the congress are requested to communicate with the Secretary.

Die Internationale Vereinigung für Kybernetik wird vom 11. bis 15. September 1961 den 3. Internationalen Kongreß für Kybernetik organisieren. Er wird in Namur stattfinden. Die Arbeiten werden sich um die 5 folgenden Themata gruppieren: Grundzüge und Methoden der Kybernetik — Semantische Maschinen — Die Automation: technische Aspekte — Die Automation: wirtschaftliche und soziale Aspekte — Die Kybernetik und das Leben.

Alle Personen, die an diesem Kongreß teilzunehmen wünschen, werden gebeten, dies dem Sekretariat der Vereinigung (13, Rue Basse-Marcelle, Namur/Belgien) mitzuteilen.

H.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr.-Ing. habil. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 1, Leipziger Straße 3-4; Fernsprecher: 220441. Postscheckkonto: Berlin 35021. Bestellnummer dieses Heftes: 1009/40/7-8. Die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,—. Zuzüglich Bestellgeld. Doppelheft DM 10,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer ZLN 5011 des Ministeriums für Kultur, Hauptverwaltung Verlagswesen. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza (V/12/6) (1). Printed in Germany.

E. P. POPOW

Dynamik automatischer Regelsysteme

Übersetzung aus dem Russischen

In deutscher Sprache herausgegeben

von Prof. Dr. Herbert Bilharz und Dr. Peter Sagirow

1958. XII, 780 Seiten — 393 Abbildungen — gr. 8° — Lederin DM 80,—

Der Autor vermittelt hier dem Leser in breiter und allgemein verständlicher Darstellung das mathematische Rüstzeug für die Behandlung von Problemen der Regelungstechnik. Unter besonderer Berücksichtigung der für den Praktiker wichtigen Näherungsmethoden wendet er sich vorwiegend den nichtlinearen Fragen zu, die in diesem Lehrbuch wohl erstmalig in solcher Ausführlichkeit behandelt werden. Der vorliegenden deutschen Ausgabe ist vom Verfasser ein Anhang beigegeben worden, der statistische Methoden und Ergänzungen zum nichtlinearen Teil enthält. Der Stoff ist durch über 300 Abbildungen und Schemata illustriert und an zahlreichen Beispielen erläutert. So bildet das Buch eine leicht verständliche Einführung und macht den Fachmann mit bisher wenig bekannten (insbesondere nichtlinearen) Verfahren vertraut.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N

BIOMETRISCHE ZEITSCHRIFT

zugleich Organ der Deutschen Region der Internationalen Biometrischen Gesellschaft

Herausgegeben von

Prof. Dr. O. Heinisch, Leipzig, und Prof. Dr. M. P. Geppert, Bad Nauheim

unter Mitwirkung von

A. Augsberger, Nürnberg	A. Linder, Genf
W. U. Behrens, Hannover	L. Martin, Brüssel
F. Burkhardt, Leipzig	H. Münzner, Berlin
K. Freudenberg, Berlin	W. Oehmisch, Berlin
J. Hartung, Hannover	A. Richter, Eberswalde
S. Koller, Wiesbaden	S. Rosin, Bern
G. A. Lienert, Marburg	H. Le Roy, Zürich
L. Schmettterer, Hamburg	

Erscheinungsweise:

Vierteljährlich ein Heft mit einem Umfang von 72 Seiten im Format 16,7×24 cm . mit Abbildungen

Bezugspreis: Je Heft DM 9,—

Die Zeitschrift bietet das erste Mal Gelegenheit, biometrisch-methodische Arbeiten in einer deutschsprachigen Fachzeitschrift zu veröffentlichen. In ihr publizieren mathematische Statistiker und Naturwissenschaftler. Diese Arbeiten geben Anleitung zu zweckmäßigen biometrischen Untersuchungen und unterrichten über Verfahren, die im In- und Ausland neu entwickelt werden. Die Arbeiten der Naturwissenschaftler sind — selbst wenn sie biometrische Auswertungen spezieller Fachprobleme behandeln — auch für Vertreter anderer biologischer Richtungen von Interesse, denn es zeigt sich, daß biometrische Methoden eines biologischen Fachgebietes sehr oft, wenn auch mitunter etwas variiert, auf andere angewendet werden können.

Die Mathematiker erkennen aus ihnen die Bedürfnisse der Naturwissenschaftler und werden durch sie zu neuen Methoden angeregt.

Die Zeitschrift ist also keineswegs nur für Wissenschaftler bestimmt, die sich speziell der Biometrie widmen, oder gar nur für mathematische Statistiker. Es wird Wert darauf gelegt, daß die erörterten biometrischen Methoden an Beispielen illustriert werden.

In einem ausführlichen Referatenteil informiert die Zeitschrift über biometrische Neuerscheinungen und Aufsätze des In- und Auslandes.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N